

特集

構造解析ソフトと衝撃解析コードの違いはどこにあるのか

伊東 雅晴 (伊藤忠テクノソリューションズ (株))

はじめに

ときどき「構造解析ソフトと衝撃解析コードはどこが違うのでしょうか」とか、「汎用の構造解析ソフトを持っているので、それを使って衝撃問題を解くことは可能でしょうか」という質問を受けることがある。このような疑問を呈する原因として考えられるのは、構造解析ソフトと比較した場合、衝撃解析コードの特徴、言い替えればその数値解法が世の中にそれほど知られていないことが挙げられるのではないだろうか。構造解析の数値解析手法に関しては数多くの教科書があるのに対し、衝撃の方はといえば計算コードの理論マニュアルを除けば Wilkins のテキスト¹⁾ 以外には見あたらないというのが現状である。

筆者は 1980 年代の後半から汎用衝撃解析コード ANSYS®AUTODYN®の開発に係わり、その計算要素や接触条件の数値解法を開発し組み込んだ経験をもつ。そこで本稿では衝撃解析コードの側からみた、

構造解析ソフトとの数値解法の違いについて述べてみたい。両コードの相違点を明示することが本稿の目的である。

ところで、巷には「誰でもわかる」という惹句を売りものにして理系教科書があり、その多くは方程式をなるべく使わずに説明をしていることに特徴がある。しかし、このような教科書の欠点は、読み終えたとなんとなくわかった気持ちにはしてくれるが、重要な事柄についてはなんら理解を深める手助けにはなってくれないという点にある。そもそも方程式を使った説明がわかりづらいのは、読者に行間を埋める作業を強いるからである。「明らかに次式が得られる」と書いてあるのに、実際に導出してみると数ページの計算が必要だったという経験は筆者だけに留まるものではないであろう。本稿では方程式を用いて説明を進めるが、読者に数式を展開する煩雑な作業を強いることがないように配慮したつもりである。

最後に、本稿で扱う衝撃解析コードの計算要素について付記しておきたい。ここではシェル要素やビーム要素に関する数値解法は扱わない。空間的な拡がりをもつ物体内部を伝播する応力波が、その物体の変形と破壊に大きく寄与する現象の解析に用いるコンピュータ・プログラムを本稿では衝撃解析コードと呼び、その数値解法について論じることが本稿の目的である。

衝撃解析コードの数値解法

(1) 保存方程式

—連続な場

構造解析ソフトも衝撃解析コードも、解析の対象とする物体を連続体という数学的な概念を用いて近似している点は同じである。連続体は無数の物質粒子の集まりでできているとみなされるが、ここで注意しなければならないのは、この物質粒子がニュートン力学という質点という概念とは異なり、体積をもち、密度や応力など熱力学的な概念を付与することができる仮想

	ラグランジュ表示	オイラー表示
質量保存式	$\dot{\rho} = -\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}$
運動量保存式	$\dot{u}_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$	$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} - \rho u_i u_j)$
エネルギー保存式	$\dot{e} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\sigma_{ij} u_i)}{\partial x_j}$	$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\sigma_{ij} u_j) - \rho u_i \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right]$

表1 ラグランジュ表示とオイラー表示による保存方程式

的な粒子であるという点である。ニュートン力学では、質量と速度の二つの物理量を質点に対して付与することができるだけである。

さて、連続体の運動の記述は、この物質粒子の存在を明示的にとらえるかどうかでオイラー表示とラグランジュ表示という二つの方法に分けられる。オイラー表示では、物質粒子が意識されなくて、空間に固定した座標をもちいて空間内の特定の1点における物理量の変化が観測される。流体の定常流れではそもそも特定の物質粒子という考えが意味をなさないことから明らかのように、この方法は一般には流体の運動の記述に適しているといえる。一方、ラグランジュ表示では、物質粒子に固定された座標をもちいて運動が記述される。この場合は物質粒子に乗って物理量の変化を観測することになる。連続体の

特定の箇所の変形をみるのに適していることから、この方法は一般に固体の運動の記述に用いられる。要するにオイラー表示の計算メッシュは時間が経過しても空間に固定されて動かないが、ラグランジュ表示の計算メッシュは空間内を移動するという違いが存在する。

表1に示したのはラグランジュ表示とオイラー表示で表現した保存方程式⁴⁾である。気体も液体も固体もすべての物質の力学現象はこの一組の方程式に従う。ここで ρ は密度、 u_i ($i=1,2,3$) は速度ベクトル、 σ_{ij} ($i,j=1,2,3$) は応力テンソル、 e は内部エネルギー密度を表す。本稿では、場の変数はすべてデカルト座標系 x_i ($i=1,2,3$) を用いて表現することとする。

図1に、鋼鉄製の飛翔体が高速でアルミニウム製の

標的に衝突して貫通する現象を、ANSYS®AUTODYN®のラグランジュ表示とオイラー表示を用いて解析したときの現象図を示す。解析体系は2次元円柱座標である。飛翔体の貫入距離は両表示でほぼ同じ結果となる。一般的に構造解析ソフトで固体を模擬する場合にはラグランジュ表示を適用し、オイラー表示を用いることはない。しかし、衝撃解析コードでは解析する対象に応じてラグランジュ表示とオイラー表示のいずれかを選択して用いる。

ここから本論に入る。表1に示した保存方程式が解をもつためには、式中で使われている密度、速度ベクトル、応力テンソルなどの物理量が連続で、かつ微分可能でなければならない。物理量に関するこの連続条件が満足されている現象の解析に用いられるのが構造

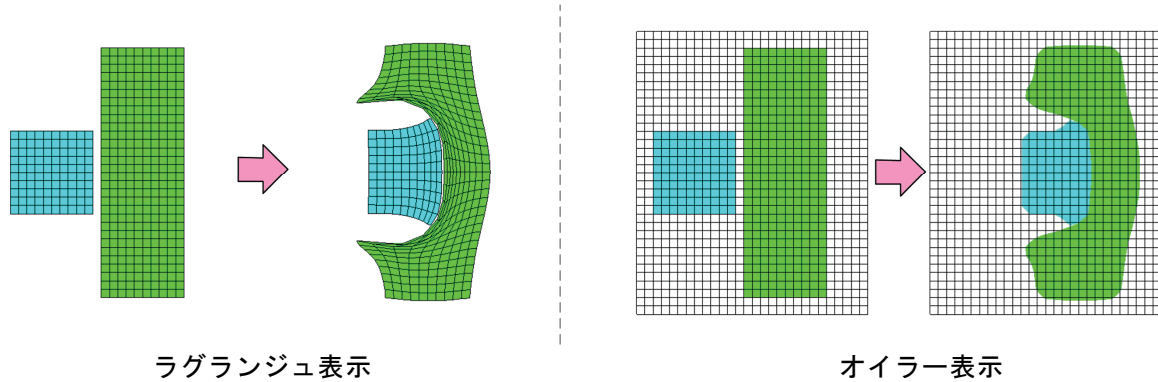


図1 二つの表記法を用いた高速衝突の数値シミュレーション
(使用計算コード ANSYS®AUTODYN®)

解析ソフトである。

では、その条件が満足されないことになり、物理量の滑らかさが常に満足されるという保証はない。その一例が衝撃波である。衝撃波の厚さは、気体の場合で分子の平均自由行程（例えば圧力 100kPa、温度 300K の窒素で約 $0.1 \mu\text{m}$ ）の数倍から 10 数倍程度と非常に薄い。圧力や密度の空間勾配を計算するためには、衝撃波の厚さ方向に数個の計算メッシュが必要であるが、そのサイズの計算メッシュで解析を行うこと

は、現在の計算機の処理能力では不可能である。何らかの条件を加えなければ衝撃波の前後で物理量は不連続となるために、保存方程式が成り立たず、数値解は不安定になってしまう。その条件が次ぎに述べる跳躍条件である。衝撃解析コードには、安定な数値解が得られるように、跳躍条件に基づくいくつかの数値解法が組み込まれている。

(2) 跳躍条件とランキン・ユゴニオ関係式－不連続な場
跳躍条件は、保存方程式

に代わり、衝撃波の前後で物理量が満足しなければならない一組の方程式である。それは以下に述べる方法で導くことができる。

いま粘性のない完全流体で満たされた空間領域の中を、衝撃波が定速 U で伝播している状況について考える。熱の発生はないものとする。図 2 に示したように、衝撃波の波面に垂直な方向に x 軸をとり、それに直角な y 方向と z 方向には物理量が変化しないと仮定した 1 次元の平板体系で議論を進める。

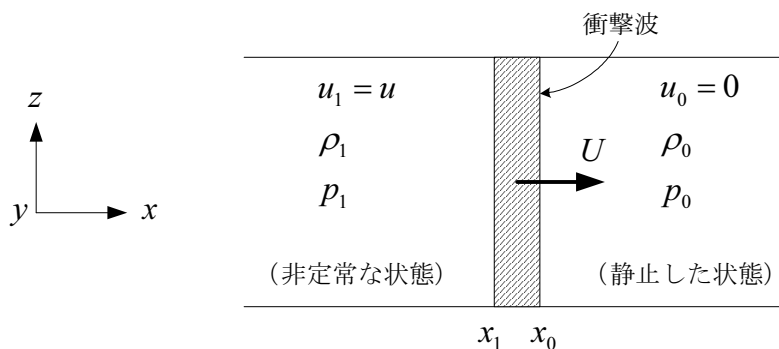


図2 一次元衝撃波の模式図

垂直衝撃波に対するランキン・ユゴニオ関係式

$$\begin{aligned} \rho_0 U &= \rho_1 (U - u) \\ p_1 - p_0 &= \rho_0 u U \\ e_1 - e_0 &= \frac{1}{2} (p_1 + p_0) \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right) \end{aligned}$$

この式からは衝撃問題の解析に適した衝撃ユゴニオ状態方程式や、衝撃波近傍の数値解の安定化に寄与する人工粘性を導くことができる

1次元の平板体系のオイラー表示の保存方程式は、表1に示した3次元の保存方程式を1次元に変換することで容易に得られる。速度ベクトル u_i をスカラー量の流速 u で、そして応力テンソル σ_{ij} もスカラー量の圧力 p で置き換え、**質量保存式**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \quad \dots (1)$$

運動量保存式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho u^2) \quad \dots (2)$$

エネルギー保存式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \rho \frac{u^2}{2} \right) = \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho e u + \rho \frac{u^3}{2} + p u \right) \quad \dots (3) \end{aligned}$$

を得る。

次に、これらの方程式を衝撃波の一方の端面 ($x = x_0$) から他方の端面 ($x = x_1$) まで積分し、同時に衝撃波の幅をゼロにも

っていく極限操作 $x_1 \rightarrow x_0$ を行う^[3]。このとき積分のそれぞれの項について

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t}(\quad) dx \rightarrow 0 \quad \dots (4)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x}(\quad) dx = (\quad)_{x_1} - (\quad)_{x_0} \quad \dots (5)$$

が成り立つことに注意する。式(4)から式(1)~(3)の左辺を積分した項はすべてゼロに等しい。そして、それぞれの式の右辺の積分項に式(5)を適用することにより、以下の表現を得る。

$$(\rho_1 u_1) - (\rho_0 u_0) = 0 \quad \dots (6)$$

$$(p_1 + \rho_1 u_1^2) - (p_0 + \rho_0 u_0^2) = 0 \quad \dots (7)$$

$$\left(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} \right) -$$

$$\left(e_0 + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{u_0^2}{2} \right) = 0 \quad \dots (8)$$

式(6)~(8)が跳躍条件であり、衝撃波を挟んで

静止状態と非定常状態の物理量が満足しなければならない状態を定めるものである。しかし、注意して見直すと、これらの式には衝撃波の情報すなわち衝撃波速度 U が含まれていないことに気づく。そこで、座標系を空間に固定された Euler 座標系から、一定速度 U で進む衝撃波に貼りつけた座標系に変換して、衝撃波の速度を跳躍条件に取り込むことを考える。

衝撃波からみると、衝撃波前面の静止状態の物質粒子は $u_0 = -U$ の速度で飛び込んできて、 $u_1 = -(U - u)$ の速度で去っていく。この関係を式(6)と式(7)に代入して整理すると

$$\rho_0 U = \rho_1 (U - u) \quad \dots (9)$$

$$p_1 - p_0 = \rho_0 u U \quad \dots (10)$$

を得る。両式を U と $U - u$ について解くと

$$U = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{p_0 - p_1}{(1/\rho_0) - (1/\rho_1)} \right]^{1/2} \quad \dots (11)$$

$$U - u = \frac{1}{\rho_1} \left[\frac{p_0 - p_1}{(1/\rho_0) - (1/\rho_1)} \right]^{1/2} \dots (12)$$

が得られるので、これらを式 (8) に代入して整理することにより、

$$e_1 - e_0 = \frac{1}{2} (p_1 + p_0) \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right) \dots (13)$$

を得る。式 (9)、式 (10)、式 (13) が垂直衝撃波に対するランキン・ユゴニオ関係式である。

このランキン・ユゴニオの関係式は重要な式である。以下で具体的に示すように、この式からは衝撃問題の解析に適した衝撃ユゴニオ状態方程式や、衝撃波近傍の数値解の安定化に寄与する人工粘性を導くことができる。

(3) 衝撃ユゴニオ状態方程式

固体に力が加えられて結晶格子がひずむと、結晶内部にはひずみに応じた体積変化により圧力が生じる。状態方程式はこの圧力の大きさを定める方程式である。保存方程式や跳躍条件がすべての物体について平等に成り立たなければならないのに対し、状態方程式は物質に固有で、例えば硬いか軟らかいというような性質はこの方程式により表現される。

結晶格子がひずむとき体積が変化するだけでなく、一般的に温度も上昇するので、体積変化からの寄与 p_L と温度上昇からの寄与 p_T の和として、圧力 p は次式のように表される^[4]。

$$p = p_L + p_T \dots (14)$$

また、圧力が行う仕事により物体には内部エネルギー e が蓄積されるが、それは

圧力と同様に線形的な和として表すことができるものとする。

$$e = e_L + e_T \dots (15)$$

上式において e_L と e_T は、式 (14) の圧力の各項に対応する内部エネルギー密度を表す。

ここで Grüneisen が提示した関係式^[5]、すなわち p_T と e_T の間に線形関係が成り立つとした。

$$p_T = \frac{\Gamma}{V} e_T \dots (16)$$

を用いると、圧力は次式のように表現することができる。

$$p = p_L + \frac{\Gamma}{V} (e - e_L) \dots (17)$$

ただし、 $V (=1/\rho)$ は比容積、 Γ はグルナイゼン (Grüneisen) 係数と呼ばれ、物質に固有な定数である。この式の意味するところ

Mie-Grüneisen 型衝撃ユゴニオ状態方程式

$$p = p_H + \frac{\Gamma}{V} (e - e_H)$$

$$p_H = \frac{\rho_0 c_0^2 \mu (1 + \mu)}{[1 - (s - 1)\mu]^2}$$

$$e_H = \frac{1}{2} \frac{p_H}{\rho_0} \left(\frac{\mu}{1 + \mu} \right)$$

Γ はグルナイゼン (Grüneisen) 係数と呼ばれ、物質に固有な定数
 状態方程式は圧力の大きさを定める方程式である
 保存方程式や跳躍条件がすべての物体について平等に成り立たなければならないのに対し、状態方程式は物質に固有で、例えば硬いか軟らかいというような性質はこの方程式により表現される

ろは、圧力が体積変化だけに依存する項（第1項）と温度変化に依存する項（第2項）の和として表すことができるということである。式(17)はMie-Grüneisen型状態方程式と呼ばれる。

式(17)で表される状態方程式の中でもっとも単純な形は、温度依存性のない ($\Gamma=0$) 線形等方弾性体に対する次の状態方程式である。

$$p = K\mu \quad \dots (18)$$

この式は構造解析では広く用いられているが、これを高速衝突問題の解析に適用することには精度の点で問題がある。衝突速度が大きくなると、体積変化 μ に対する圧力の変化が線形関係から外れていき、さらに温度上昇の影響も無視できなくなると予想されるからである。

そこで、前に導いておいた、垂直衝撃波の前後の物理量に関するランキン・ユゴニオの関係式を利用して、衝撃波の存在下でも圧力が精度良く評価できる状態方程式を以下の手順に従い求める。

ランキン・ユゴニオの関係式は、

$$\rho_0 U = \rho_1 (U - u) \quad \dots (19)$$

$$p_1 - p_0 = \rho_0 u U \quad \dots (20)$$

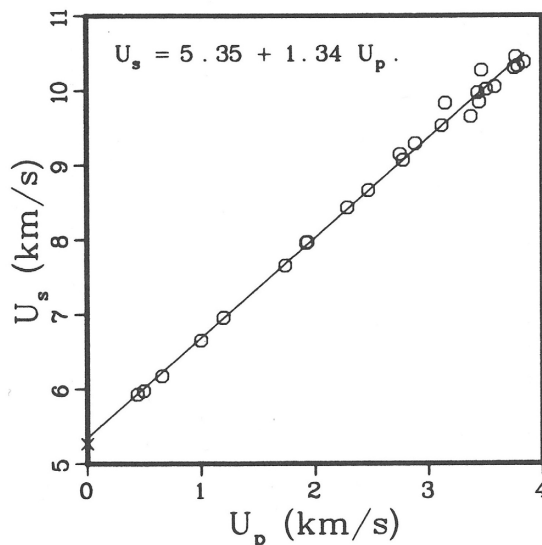


図3 2024-Aluminumの衝撃波速度 U_s と粒子速度 U_p の関係^[6]

$$e_1 - e_0 = \frac{1}{2}(p_1 + p_0) \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right) \quad \dots (21)$$

であった。いま静止状態の物理量 (ρ_0, p_0, e_0) の3つは既知とすると、値が未知な変数は (ρ_1, p_1, e_1, u, U) の5個である。したがって次式

$$U = c_0 + su \quad \dots (22)$$

を加えて方程式の個数を4つとすると、 p_1 と e_1 を ρ_1 の関数として表すことができる。それがここで求めようとしている衝撃ユゴニオ状態方程式に他ならない。式(22)は、衝撃波の速度 U と運動する物質粒子の速度 u の線形関係を示している。 c_0 と s は試験により決められる材料定数である。この

関係式は、いま唐突な形でここに登場させたが、多くの物質に認められる性質であり、文献[6]には600種以上の物質のデータが掲載されている。一例として、図3に2024アルミニウムについて得られた実験データを示す。

式(19)～(21)において、衝撃波が伝播する前の静止状態について

$p_0 = e_0 = 0$ を仮定しても一般性は失われない。そうして得られたランキン・ユゴニオ関係式と式(22)を連立させると、次式を導くことができる。

$$p_1 = \frac{\rho_0 c_0^2 \mu (1 + \mu)}{[1 - (s-1)\mu]^2} \quad \dots (23)$$

$$e_1 = \frac{1}{2} \frac{p_1}{\rho_0} \left(\frac{\mu}{1+\mu} \right) \dots (24)$$

Mie-Grüneisen 型状態方程式 (17) の (P_L, e_L) に、求めた (p_1, e_1) を代入して、

$$p = p_H + \frac{\Gamma}{V} (e - e_H) \dots (25)$$

$$p_H = \frac{\rho_0 c_0^2 \mu (1 + \mu)}{[1 - (s-1)\mu]^2} \dots (26)$$

$$e_H = \frac{1}{2} \frac{p_H}{\rho_0} \left(\frac{\mu}{1+\mu} \right) \dots (27)$$

を得る。ただし、 (p_1, e_1) を (p_H, e_H) と表記した。これが Mie-Grüneisen 型衝撃ユゴニオ状態方程式である。衝撃解析で模擬される多くの物質に対して、この状態方程式が用いられる。ANSYS®AUTODYN® の材料ライブラリには 50 種類ほどの材料の定数が記載さ

れている。

(4) 衝撃波を緩和する人工粘性力

上でも述べたように、衝撃波の厚さは実用上可能な計算メッシュのサイズに比較すると非常に薄いので、その厚さ方向に数個のメッシュを切ることは不可能である。

問題を解決する一つの方法は、衝撃波を相互作用境界面として扱うものである [7]。ランキン・ユゴニオ関係式 (19) ~ (21) と状態方程式 (25) から、圧力・速度・密度・内部エネルギーなどの跳躍量を求め、次にこの跳躍量を衝撃波の両側の領域に境界値として負荷するという手法である。この手法の欠点は、1次元よりも高次の次元に拡張することが難しい点にある。すなわち3次元空間内で複

数の衝撃波が互いに干渉しつつ伝播している状況で、それぞれの衝撃波を追跡し、その位置と形状をとらえるには非常に複雑な数値計算アルゴリズムを必要とするからである。

他の一つは、Von Neumann と Richtmyer が考案した人工粘性力 [8] を用いる方法である。この手法は衝撃波を追跡する必要がなく、また複雑な計算アルゴリズムも使わず3次元への拡張も比較的容易なため、発表されてから半世紀が経過した現在でも多くの汎用衝撃解析コードに採用されている。なお、このことは当然であるが、衝撃波の伝播を解析対象としない構造解析ソフトに人工粘性力は不要である。

人工粘性力の基本的な機能は、衝撃波の厚さを計算メッシュ幅の 3~5 倍にぼ

衝撃波を緩和する人工粘性力

$$q_1 = \rho C_Q^2 l^2 \dot{\epsilon}_{kk}^2$$

$$q_2 = -\rho C_L l c_0 \dot{\epsilon}_{kk}$$

$$q = q_1 + q_2$$

衝撃波の厚さは実用上可能な計算メッシュのサイズに比較すると非常に薄いので、その厚さ方向に数個のメッシュを切ることは不可能

問題を解決する一つの方法として Von Neumann と Richtmyer が考案した人工粘性力を用いる方法である

この手法は衝撃波を追跡する必要がなく、また複雑な計算アルゴリズムも使わず3次元への拡張も比較的容易なため、発表されてから半世紀が経過した現在でも多くの汎用衝撃解析コードに採用されている

かし、基礎方程式の解を空間内のすべての場所で連続にすることにあり。ただし、人工粘性力の影響は衝撃波が存在しない領域では、本来の解に影響を与えないように、無視できる程度に小さくしなければならない、

Von Neumann と Richtmyer はそのような条件を満足する人工粘性力の関数として、次式を提示した。

$$q_1 = \rho C_Q^2 I^2 \dot{\epsilon}_{kk}^2 \quad \dots (28)$$

ここで I はメッシュ幅である。 C_Q は定数を表し、この値を大きくすると数値的な衝撃波の厚さは厚くなる傾向を示す。 $\dot{\epsilon}_{kk}$ は変形速度テンソルの対角成分の和、すなわち体積変化率である。 $\dot{\epsilon}_{kk}$ は衝撃波の近傍では大きく、衝撃波から離れるのにしたがって小さくなるので、人工粘性力に用いるのに望ましい性質を有している。

しかし、式 (28) で表される人工粘性力は、衝撃波前面に対しては有効であるが、衝撃波が通過した後の数値的振動を抑制するには有効に機能しない欠点のあることがその後指摘された。この欠点を解決するために、Landsoff^[9] は $\dot{\epsilon}_{kk}$ に関して線形な関数 q_2

$$q_2 = -\rho C_L I c_0 \dot{\epsilon}_{kk} \quad \dots (29)$$

を q_1 と組み合わせ

$$q = q_1 + q_2 \quad \dots (30)$$

の形で人工粘性力を評価する手法を提案した。多くの汎用衝撃解析コードが現在この式を採用している。

ここで人工粘性力を実際に導いてみる。von Neumann と Richtmyer の原著論文^[8]にはその導出過程が示されており、また Wilkins^[10]は理想気体の場合について人工粘性力を導いたが、論文にはその結果が記されているだけである。このように導出過程を記述した文献の入手が難しいことを考慮して、以下では線形弾性体の場合について、ランキン・ユゴニオ関係式と状態方程式を用いて、人工粘性力の q_1 と q_2 の関数形を具体的に導き、それが式 (28) や式 (29) と同じ形になることを確認する。

いま衝撃波が到達する前の状態量について

$$p_0 = e_0 = 0 \quad \dots (31)$$

と仮定し、この式を式 (19) ~ (21) に代入すると

$$\rho_0 U = \rho_1 (U - u) \quad \dots (32)$$

$$p_1 = \rho_0 u U \quad \dots (33)$$

$$e_1 = \frac{p_1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right) \quad \dots (34)$$

を得る。

以下では、式 (32) ~ (34) と次の線形弾性体の状態方程式

$$p_1 = K (\rho_1 / \rho_0 - 1) \quad \dots (35)$$

を連立させて U について解き、それを用いて人工粘

性項を導く方向で議論を進める。

式 (33) と式 (35) から得られる次式

$$\rho_0 u U = K (\rho_1 / \rho_0 - 1) \quad \dots (36)$$

の右辺の ρ_1 に、式 (32) から導いた

$$\rho_1 = \frac{U}{U - u} \rho_0 \quad \dots (37)$$

を代入して整理すると

$$U(U - u) = c_0^2 \quad \dots (38)$$

を得る。ただし $c_0 = \sqrt{K/\rho_0}$ を用いた。 c_0 は物体中を伝播する音速を表す。

式 (38) は U に関する 2 次式であり、容易に解くことができ、その解は

$$U = \frac{u}{2} + \left[\left(\frac{u}{2} \right)^2 + c_0^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\because U > 0) \quad \dots (39)$$

である。これを式 (33) に代入すると次式を得る。

$$p_1 = \rho_0 \frac{u^2}{2} + \rho_0 u \left[\left(\frac{u}{2} \right)^2 + c_0^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots (40)$$

ここで u と c_0 の大きさが極端に異なる 2 つの場合について考えると、式 (40) から次の 2 つの式を導くことができる。

$$p_1 = \rho_0 u^2, \quad (\because u \gg c_0) \quad \dots (41)$$

$$p_1 = \rho_0 c_0 u, \quad (\because u \ll c_0) \quad \dots (42)$$

この 2 つの式はそれぞれ 2

次と1次の人工粘性、すなわち

$$q_1 = \rho_0 C_0 u^2 \quad \dots (43)$$

$$q_2 = \rho_0 C_L c_0 u \quad \dots (44)$$

に対応する。

以上の議論では1次元を仮定して式(43)と式(44)を導出したが、これを3次元に拡張する場合は、速度 u を $(l\dot{\epsilon}_{kk})$ に置き換えることが必要である。その結果は式(28)と式(29)に一致する。

接触境界条件

ラグランジュ表示を採用した計算コードで物体の衝突問題を解析するには、接触面での計算メッシュの重なりを防ぐために接触境界条件が必要である。図1に示した例題では、飛行体と標的の間に接触境界条件が設定されている。この接触境界条件の計算手法は、その開発時期と適用分野の違いからいわゆる節点力法と

スライドライン法に大きく分けられる。

節点力法は、1980年代以降に開発された非線形構造解析コードで一般的に採用されている手法である。その特長は、アルゴリズムがスライドライン法に比べると簡潔で計算時間が短くてすむ点である。自動車衝突や塑性加工など衝突速度が比較的低い現象の解析に適している。一方のスライドライン法は、開発された時期が節点力法よりも早く、1950年代のHEMPコード^[11]まで遡る。その特長は接触面を通過する応力波を正しく模擬できることである。この計算手法は、接触面において計算要素と計算要素の接触面積を求め、接触面での応力波の透過・反射が精度良く模擬できるように考慮されている。

以下において、節点力法の代表的な計算手法であるペナルティ法^[12]と、スライ

ドライン法については近似リーマン・スライドライン法^[13]をとりあげ、両者の計算精度の比較をする。詳しい説明は省くが、近似リーマン・スライドライン法は、接触面の速度を上述のランキン・ユゴニオ関係式から求める手法であり、接触面において透過あるいは反射する圧力波を精度良くとらえることができる。

解析対象は無限長さの2本の同軸円管である。図4に示したように、解析体系は対称性を考慮して、実体系の1/4とし、z方向の変位は拘束する。内側の円管には解析終了時まで、その降伏応力より大きな一定の圧力を負荷する。円管は弾完全塑性体であり、以下の材料定数を用いる：密度 2700 kg/m³、体積弾性係数 70GPa、横弾性係数 30GPa、降伏応力 300MPa。

図5に、ペナルティ法と近似リーマン・スライドラ

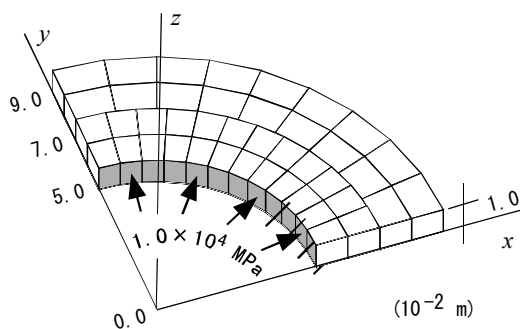


図4 同軸円管の衝突問題

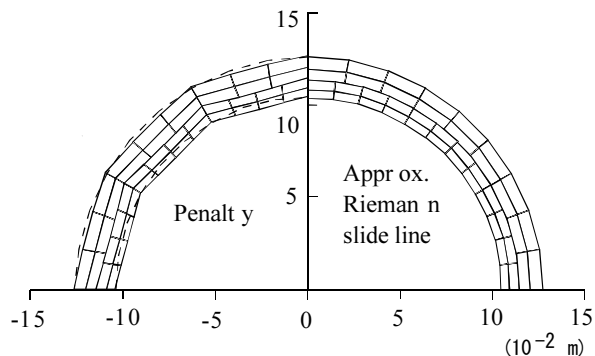


図5 円管のメッシュ変形状

イン法で得られた $t = 30 \mu\text{s}$ における変形図を示す。解析条件に対称性を崩すような条件は設定していないので、円管断面はつねに円形形状を保ちつつ変形するはずである。しかし、ペナルティ法（左側）で得られた変形形状は周方向の対称性が崩れ、折れ曲がる形状となった。それに対し、近似リーマン・スライドライン法（右側）の計算メッシュは変形後も円形が保たれ、

妥当な解析結果となった。ペナルティ法の場合、この解析例のようにメッシュ依存性が発生する可能性があるため問題によっては適用する際に注意が必要である。

まとめ

構造解析ソフトと衝撃解析コードの違いについて、本稿では、圧力を規定する状態方程式、衝撃波を緩和する人工粘性の有無、接触

境界条件の解法の3点に注目して論じた。保存方程式の極限操作から跳躍条件を経てランキン・ユゴニオ関係式へと進み、ランキン・ユゴニオ関係式からは衝撃ユゴニオ状態方程式と人工粘性力を具体的に導き、その導出過程を明示した。

参考文献

- [1] Wilkins, M.L., *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*, Springer, 1999.
- [2] Eliezer, S. et al., *Fundamentals of Equations of State*, 2002, World Scientific, pp.165-168.
- [3] Eliezer, S. et al., *Fundamentals of Equations of State*, 2002, World Scientific, p.179.
- [4] Eliezer, S. et al., *Fundamentals of Equations of State*, 2002, World Scientific, p.153.
- [5] Grüneisen, E., *Handbuch der Physik*, ed. H. Greiger & K. Scheel, 10, 1-59, Springer.
- [6] Marsh, S.P., *LASL Shock Hugoniot Data*, University of California Press, 1980.
- [7] Hiermaier, S., ed., *Predictive Modeling of Dynamic Processes: A Tribute to Professor Klaus Thoma*, 2009, Springer, p.349.
- [8] Von Neumann, J. and Richtmyer, R.D. A method for the calculation of hydrodynamic shocks, *Journal of Applied Physics*, 21 (1950), pp.232-237.
- [9] Landsoff, R., A numerical method for treating fluid flow in the presence of shocks, LA-1930, Los Alamos National Laboratory.
- [10] Wilkins, M.L., Use of artificial viscosity in multidimensional fluid dynamic calculations, *Journal of Computational Physics*, 36 (1980), pp.281-303.
- [11] Wilkins, M., *Calculation of elastic-plastic flow*, UCRL-7322, Rev.1.
- [12] Hallquist, J.O., Goudreau, G.L. and Benson, D.J., Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations, *Computer Method for Applied Mechanics Engineering*, 51 (1985), pp.107-137.
- [13] 伊東雅晴, 村上澄男, 近似リーマン法に基づく三次元動的接触境界アルゴリズム, 日本機械学会論文集 A 編, 66-649 (2000), pp.130-137.