震源断層近傍域の地震動

まず,地震動予測手法についての理解を深めるため,震源断層近傍において生じる地震動の特徴とそれを生じる現象について,平成7年兵庫県南部地震で生じた神戸市域の強震動を例として解説をおこなう。なお,筆者が関西在住ということもあり,大阪を中心とした事例が多いが,ご容赦願いたい。

1.活断層と地震地形

平成7年兵庫県南部地震では,淡路島北西の地表に地震断層が出現した。このような地表地震断層は,地質学的(地質構造が両側で異なる)・地形学的(地形を変位させている)な境界線と考えられていたものに対応している。この場所では,兵庫県南部地震で生じたものと同様の断層運動が過去に何度も起こり,その断層変位の蓄積によって明瞭な断層地形が遺されている。

このような断層地形は日本では至る所に分布し,過去に生じた地震の痕跡とされている。これら断層地形のうち比較的新しい第四紀(約180万年前まで)の地層にも変形を生じ,かつ現在も地震を起こす可能性のあるものを特に活断層と呼んでいる。図-1に近畿地方の活断層分布を示す。この地方には非常に多くの活断層が分布していることが分かる。ひとつひとつの活断層は数千年に1度の間隔で活動するとされているが,これだけの数を考慮すれば,いずれかの活断層による地震は人間活動の時間尺度で発生することになる。



図 - 1 近畿地方の活断層分布「活断層研究会(1991)]

図 - 1でも明らかなように、大阪湾を含む大阪平野は活断層で周りを囲まれている。これは、周辺山系と大阪平野が断層運動によって形成されたことに起因する。断層運動によって周辺山地が相対的に隆起して平野部が沈降することにより、河川が絶えず堆積物を供給しているにもかかわらず大阪湾が存続し続けている。日本の都市が位置する平野や盆地はそのほとんどがこのような断層活動で生じたものである。古くからの街道は直線上に伸びる断層地形に沿って作られていることが多く、現代の高速道路も断層地形に沿って作られている場合がある。また、変化に富んだ日本の自然も断層運動によって形成されたものが多く、我々の生活は活断層に密接したものとなっている。その意味で、活断層と地震の関係を正しく認識し、活断層と共存してゆく必要がある。

地震を起こす断層の種類としては,横ずれ断層と,逆断層,正断層の縦ずれ断層がある(図-2)。横ずれ断層は,相手側のブロックが右に動くか左に動くかによって右横ずれ断層と左横ずれ断層に分類される。日本列島のような圧縮場では,横ずれ断層と逆断層型の地震が多く発生する。実際には横ずれ断層と縦ずれ断層の成分を両方持っている場合も多い。

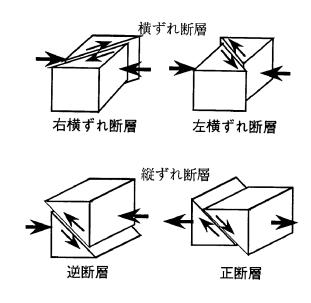


図 - 2 断層の型

このような断層破壊が生じるためには硬い岩盤に応力が加わることが必要で,軟弱な地盤では破壊的な地震波を生じる断層破壊は起こらない。堆積層を切って地表に現れる地震断層は,地殻で起こった断層破壊に引きずられて堆積層が動いた結果であり,地震波を放射するような断層破壊が地表にまで及んだわけではない。近年の研究によると,岩盤の強度が大きくて歪みを蓄えることが出来る,地殻の3km程度よりも深い部分で内陸地震が発生しているとされる。また,約20kmよりも深くなると岩盤の温度が上がって流動性が大きくなり,歪みを蓄えることが出来ずに地震が発生しなくなる。

2.震源から放射される地震波(1):点震源

物質に圧縮力が作用した場合には、図・3に示すように直交方向に膨らむ引張力が物質に生じる。これが地殻内の応力場の状態で、普段はこれで釣り合っている。このとき物質が受ける応力は、二対の偶力(モーメント:ある距離を置いた逆向きの力)が作用していることと等価である(図の左右の力をベクトル合成すれば同じとなる)。このような応力場では、圧縮力に斜交する方向に剪断破壊が生じることが知られている。このとき破壊を生じた剪断面が地震断層であり、ふたつの剪断面のどちらが破壊するかと剪断面と重力方向との位置関係(水平か鉛直か)によって、地震断層は右横ずれ断層・左横ずれ断層・逆断層と呼ばれる。したがって、近畿地方のような東西圧縮場では北東・南西走向の右横ずれ断層(六甲断層系など)、北西・南東走向の左横ずれ断層(山崎断層など)、あるいは南北走向の逆断層(生駒断層など)が卓越することになる。

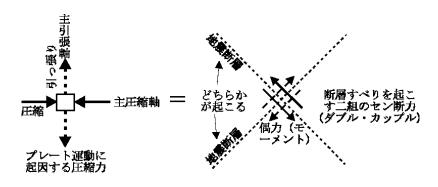


図 - 3 地殻に作用する応力と断層のずれ

次に,横ずれ断層を真上から見た場合を想定し,このような地震断層からどのような地震波が放射されるか(放射特性)について考察する。地震波には,圧縮伸張による体積の変化を伝える P波(粗密波)とねじれが伝わるS波(剪断波)があることが知られている。観測される地震動としては一般にS波の震幅の方が大きく,地震被害に大きく影響するのはS波である。

これらの波が放射される様子を図-4に示す。図は方向毎に放射される地震動の大きさと,最初に揺れ始める向きを示したものである。主圧力軸と主張力軸の方向には,図-3の力の関係からも理解されるように,圧縮伸張を伝えるP波が放射される。圧力軸方向の地表面は引き込まれて下向きのP波で,張力軸方向には地面が押し出されて上向きのP波で震動が始まる。主圧力軸と主張力軸でP波の放射振幅は最大であり,そこから離れるにつれて放射されるP波の振幅が小さくなってゆく。P波の振動方向は常に半径方向となる。やがてP波の放射振幅が無くなり(節),そこからは初動方向が逆転する。P波初動の向きを,震源断層を囲む幾つかの観測点で評価する

ことにより,その断層の破壊パターンを概ね推定することが可能である。実際,地震断層でどのような破壊が生じたかは,そのような方法で決定されている。

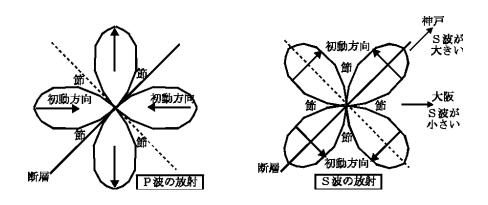


図 - 4 断層破壊によって放射される地震動

主圧力軸と主張力軸の方向から離れると,ねじれによるS波が放射される。S波の放射パターンはP波のそれを相補う形になり,図-4に示した二対の偶力の方向がS波の初動の方向となる。S波の振動方向は常に接線方向になる。P波の場合と同様に,震動方向が逆転する面ではS波の放射は無い(節)。平成7年兵庫県南部地震を例にすると,横ずれ断層に沿った神戸市から大阪府北部域の方向ではS波の放射振幅が大きく,大阪府中央部にはS波の放射振幅が小さい。これは,実際の震動・被害分布とも良く対応している。

図 - 4には地震動放射のイメージを示したが、視覚的に理解を深めるため、任意の断層による地表面の地震動強さを図示するためのエクセル(Excel は Microsoft 社の登録商標)のテンプレート・ファイル(radiation.xls)を別途添付している(本章最後の付録A,B)。参考にされたい。

3.震源から放射される地震波(2):断層震源

ここまでに示した現象は、地震波が微小な一点から放射される場合(点震源)を想定したものである。地震の規模が小さく断層破壊面積が小さい場合、あるいは大きな地震断層でも非常に遠距離で観測する場合には、このような点震源の近似でも問題は少ない。しかし、破壊面積が広く規模の大きな地震を震源断層の近傍で観測する場合には、断層面の広がりを考慮する必要がある。

大きな地震では,図-5に示すように破壊開始点(一般に言われる震源)から破壊が進行し,破壊が到達した部分から順に地震波が放射されてゆく。これが震源断層で見た地震現象の姿と考

えられている。破壊が伝播する速度は、地震が発生する地殻のS波速度よりもやや小さい程度である。図-5で、断層破壊は、、と進行してゆくと仮定する。このとき、破壊進行側と遠ざかる側では各点まで破壊が伝播してゆく時間は同じであり、が一番短くが一番長くなる。一方、地震波(S波)の伝播経路の長さは、破壊進行側ではが最も長くが最も短い。破壊が遠ざかる側ではその反対にが最も短くが最も短くなる。このため、破壊進行側では地震波が断層面上の各点から生じた地震波(S波)がほぼ同時に到来し、それらが重なり合って大きくなるとともに継続時間は短くなる。一方、破壊が遠ざかる側の地震波は間隔をおいて順に到来し、継続時間が長くなるものの振幅は大きくならない。このように、断層破壊の進行方位に依存する地震動の特性を、ディレクティビティ(方位特性)と言う。これは、震源断層域の地震動を特徴付ける大きな要因となる。

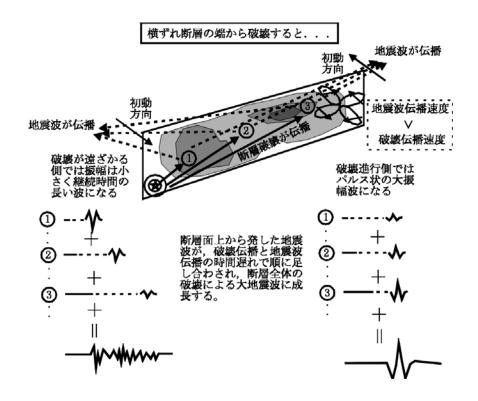


図 - 5 断層破壊の進行が地震動に及ぼす影響(横ずれ断層の端から破壊)

図 - 5のイメージを動画的に示すシミュレーションを,エクセル(Excel は Microsoft 社の登録商標)のテンプレート・ファイル(2dfdm.xls)として別途添付している(本章最後の付録A,C)。参考にされたい。

次に,破壊が横ずれ断層の中央から始まる場合を想定する。この場合,図-6の断層の右半分と左半分には図-5に示した状況がそれぞれ適用できる。破壊開始点では,破壊が遠ざかることによって,継続時間が長く振幅の小さい地震動が観測される。しかも,右半分と左半分では到来

する地震波の震動方向が逆になるため,それらが打ち消し合う方向に干渉して地震動が小さくなる。仮に,両側の断層破壊が全く同じように進行すれば,震央直上は理論的には全く揺れなくなる。ただし,これは横ずれ断層を想定した場合であることに注意する必要がある。逆断層の場合については後述する。

横ずれ断層の中央部から破壊すると...

断層の両半分から到来する地震波は断層直交成分のみで、 波形は基本的には対称。

しかも破壊が遠ざかっていくセンスになるので、振幅は比 較的小さく継続時間の長い波形になる。

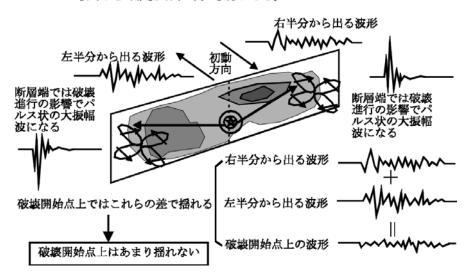


図 - 6 断層破壊の進行が地震動に及ぼす影響(横ずれ断層の中央から破壊)

平成7年兵庫県南部地震では,図-4に示したS波の放射特性とこのようなディレクティビティの影響から,神戸から大阪府北部域の断層延長線上で特に大きな震動が生じたと考えられている。また,被害や体験談などから破壊開始点となった明石海峡付近の地震動はそれほど大きくはなかったと考えられている。これらは,図-6で示した地震動放射の特徴と整合したものである。このように,断層近傍における地震動を想定するにあたっては,単純に震央あるいは断層からの距離で地震動が決まるのではないことを念頭に置く必要がある。

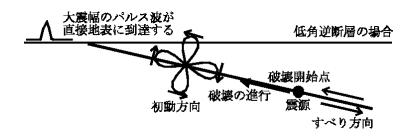
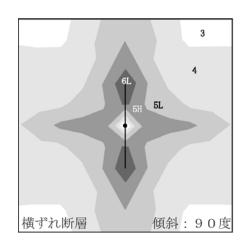


図 - 7 断層破壊の進行が地震動に及ぼす影響(逆断層)

次に,逆断層から放射される地震動を考える。逆断層の破壊は,図-7に断面図を示すように,横ずれ断層の断層すべり方向が地表に向かうと考えれば良い(横ずれ断層の上面図が側面図になると考えれば良い)。このとき,図-4に示したS波の放射パターンでは,地表に向かう方向はS波放射が最大となる方向に対応する。また,断層破壊が地表に向かって伝播するディレクティビティの影響で,震幅の大きい波が地表に集中することが想定される。

図 - 8 に , 同一規模(長さ 40km , 幅 20km でマグニチュード 7 相当)の横ずれ断層と逆断層による岩盤上の震度の分布を計算した例を示す。いずれも , 破壊開始点は断層中央である。横ずれ断層では断層走向方向の延長に広く震動が分布するのに対して , 逆断層では断層線上に大震動域が集中する傾向がある。このように , 同一規模の地震による震源断層近傍では , 逆断層型の地震動が横ずれ型よりも大きくなる傾向にあるので , 注意が必要である。また , その震動分布形状も大きく異なっている。地域の活断層による地震動を考えるにあたっては , このような断層タイプ毎の地震動性状を考慮する必要がある。ただし , 図 - 8 は岩盤上の地震動を理論的に表現した理想的な分布に過ぎない。堆積層の分布によっては , その形状が異なることが予想される。また , 破壊開始点の位置や非一様すべりの影響 (後述)によっても形状が異なることが考えられる。



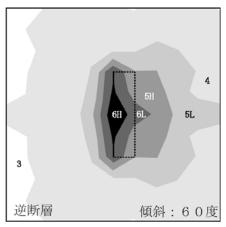


図 - 8 横ずれ断層と逆断層を想定したシミュレーションによる震度分布

4.震源から放射される地震波(3):非一様すべり

以上の解説は、断層面全体で断層すべりが一様であると仮定したものである。しかし、実際の すべりは一様ではなく、場所によってゆらぎのある現象である。図 - 9 に、平成7年兵庫県南部 地震の近地強震記録から推定された、断層面上でのすべりの大きさと方向の分布を示す [Sekiguchi et al.(1996)]。断層面のうち,すべり量の大きい部分(アスペリティと称する)から大きな震動エネルギーが放射されたと考えられている。図では,破壊開始点(震源)から野島断層の浅部付近に大きなすべりの分布が見られ,神戸市域の深部にもやや大きなすべりがある。

このように,広い断層面の中でも被害に結びつくような地震波を放射する面積は小さく,その分そこから放射される地震波が集約されて大きくなる傾向がある。大きな地震断層では,このような非一様すべりが近傍の地震動の,特に卓越周期に大きく影響することが分かって来た。平成7年兵庫県南部地震では周期約1秒の地震動が卓越したが,より規模の大きな1999年トルコ,台湾の地震では5秒を越える周期の地震動が卓越している。このような周期特性は,すべり量の大きい部分の面積と,そこでのすべりに要した時間に影響されることが分かって来ている。

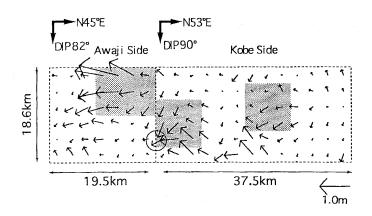


図 - 9 断層面上の非一様破壊

このように、震源断層近傍の地震動は断層面がどのように破壊してゆくかに大きく依存する。したがって、そのような断層破壊の進行を表現し得る手法で地震動を評価する必要がある。一方、そのような地震動評価手法は、地震規模(マグニチュード)と距離の2変数のみで平均的な地震動強さを表現する経験的な距離減衰式に比べて多くの計算パラメターを必要とし、断層破壊という自然現象を現すそのようなパラメターを予測しておくことは困難である。そこで、パラメターのばらつきを考慮した地震動の評価が重要となる。また、強震動予測の精度を高くするためには、このような断層破壊パラメターの法則性を知り、パラメター設定によるばらつきを小さくするための調査研究が重要となる。

5. 堆積層の影響

平成7年兵庫県南部地震では,岩盤より成る山地(六甲山系)と堆積層の境界からやや離れた

部分に地震動の大きい領域(いわゆる「震災の帯」)が生じた。これは,深層地盤構造の影響と考えられている。その現象をより直感的に理解するため,図-10に波動伝播のスナップ・ショット(連続的なアニメーション図)を示す[Pitarka et al.(1996)]

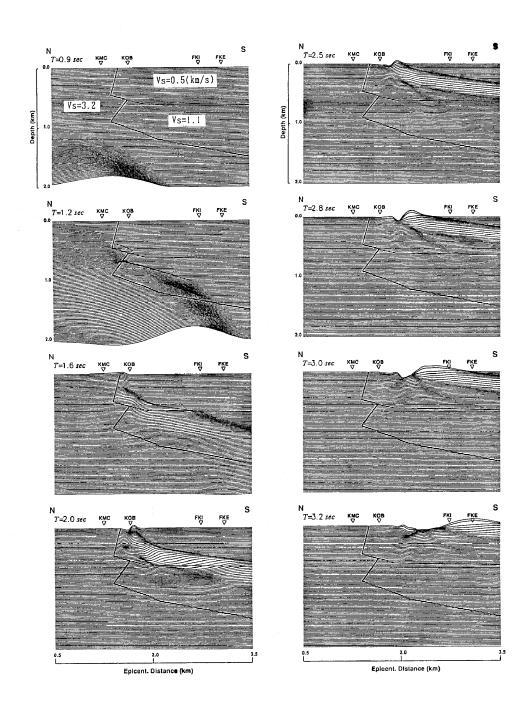


図-10 堆積層に入射する地震波のスナップ・ショット

図 - 10は,神戸市東灘区の六甲山麓から海岸部をイメージした地盤構造に地震波が入射した場合の,0.9 秒後から3.2 秒後の空間的な地震動分布を表示したものである。計算モデルは反射法地震探査の解析断面に基づいており,逆断層構造を境に岩盤よりなる山系(図の左側)と厚い

堆積層(図の右側)が存在していることが特徴的である。このような構造は,日本の都市が立地する平野,盆地と山地との境界端部では一般的なものと考えられる。0.9 秒後には地震波は岩盤内にあり,岩盤の地震波速度 c が大きいため, =c/f の関係(f は周波数で,振動数と同義)から波長が長くなっている。ここで言う岩盤とは,地震が生じた地殻に準じたものを想定しており,S 波速度で 3.2km/s と設定された非常に硬質な岩盤である。地震学的な基盤はこのような定義で用いられることがい。1.6 秒後には先ほどの波動が岩盤に比べて地震波速度(c)の遅い堆積層に入り込んでいる。図の計算では堆積層は大まかには 2 分されており,下の層がS 波速度 1.1km/s,上が 0.5km/s となっている。波動の周波数帯域は岩盤と変わらないので,堆積層内では波長・が短くなっている。高速で岩盤内を伝播して来た地震波が急に堆積層内で遅くなったために停滞し,エネルギーが集中して振幅が大きくなる。津波の波高が海岸近くで急に高くなるのもこれと同様の原理である。これは,速度の遅い堆積層で地震波が増幅する原因のひとつであり,岩盤では長い波長にわたって広く分散していたエネルギーが短い波長の中に集中したと考えることもできる。

1.6 秒後から 2.5 秒後にかけては,山地境界から浸み出した波が堆積層を右方向(海の方向)に伝播して行く。この波と下から上昇した波が衝突し,2.8 秒後以降では山地境界からやや離れたところで大きな振幅を示している。これが,平成7年兵庫県南部地震で「震災の帯」を生じた地震動の大きな要因と考えられている。単に上下方向に伝播する波動では,「震災の帯」を説明することはできない。堆積層端部(エッジ)で起こる現象であるので,「エッジ効果」とも呼ばれている。このような現象は,同様の山地と堆積層の境界部ではどこでも生じ得るものであり,不整形な地盤構造が地震波動に及ぼす影響も,設計に用いる地震動の評価においては重要な要素である。

以上を模式化して図 - 1 1 に示す。盆地端部ではS波の波面が傾くため,S波による上下動が生じる。このため,このような領域は,P波による小刻みな上下動ではなく,大きく揺すられるような上下動に見舞われたものと推定される。

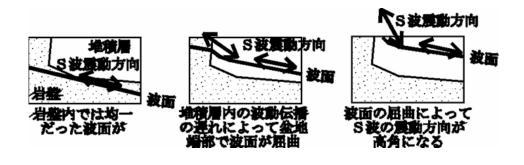


図 - 11 エッジ効果の模式図

また,臨海部など地盤が軟弱な場所では,地盤が大きな地震動に追随して応答できないために, 入力に比例した出力が得られない非線形な応答を生じ,波動の増幅が制限される。平成7年兵庫 県南部地震ではこのために湾岸部の地震動が大きくならずに,「震災の帯」をより狭く強調する 結果になったものと考えられている。

参考文献

活断層研究会:新編日本の活断層,東京大学出版会,1991.

Pitarka, A., K. Irikura, T. Iwata, and T. Kagawa: Basin Structure Effects in the Kobe
Area Inferred from the Modeling of Ground Motions from Two Aftershocks of the January
17, 1995 Hyogoken-nambu Earthquake, *J. Physics of the Earth*, **44**, 563-576, 1996.

Sekiguchi, H., K. Irikura, T. Iwata, Y. Kakehi, and M. Hoshiba: Minute Locating of Fault Planes and Source Process of the 1995 Hyogo-ken Nanbu(Kobe), Japan Earthquake from the Waveform Inversion of Strong Ground Motion, *J. Physics of the Earth*, **44**, 473-488, 1996.

付録A エクセル・テンプレートの導入

1)はじめに

表計算ソフト(Excel[†])の機能を用いて,強震動に関することがらを視覚的に理解するための テンプレート・ファイルを作成した。以下,その使用法について解説する。

(* Excel は Microsoft 社の登録商標である。)

2)使用上の注意

使用にあたっての注意点は以下の通りである。

- 1) ここで紹介するテンプレート・ファイルは ,Microsoft 社の表計算ソフト , " Microsoft Excel " で動作する。" Microsoft Excel " が正常にインストールされている環境が必須である。
- 2) 計算には, "Microsoft Excel"のマクロ機能を用いている。そのためマクロが使える環境が必要となる。
- 3) テンプレート・ファイルには特にシートやセルにプロテクトを施していない。そのため,オリジナルの設定を保存しておく上でもテンプレート・ファイルのオリジナルは別途保存しておき,コピーしたファイルで作業をすることが望ましい。
- 4) 以下の解説は、"Microsoft Excel"の使用にある程度習熟していることを前提としている。
- 5) 用いた手法の詳細については別途解説するので,それを理解されていることを前提としている。

3)準備

エクセルの利用できる環境で、各テンプレート・ファイル"2dfdm.xls"などをオープンすると、図 - 1のようなメッセージが表示されることを確認する。ここで、「マクロを有効にする」を選択する。このメッセージが表示されない場合は、図 - 2のようにセキュリティの設定を選び、図 - 3のようにセキュリティ・レベルを「中」に設定する。これでマクロ機能の利用を許可したことになる。なお、各図の背景に示されているテンプレートの内容は、開いたエクセル・ファイルに依存する。一度セキュリティ・レベルを設定しておけば、以後は再設定の必要は無い。(ただし、セキュリティを初期よりも低い状態に設定したことに注意されたい。)

正常にファイルがオープンされると、それぞれのテンプレートに応じたシートが表示される。 計算は、これらのシートにパラメターを入力して実行してゆくことになる。

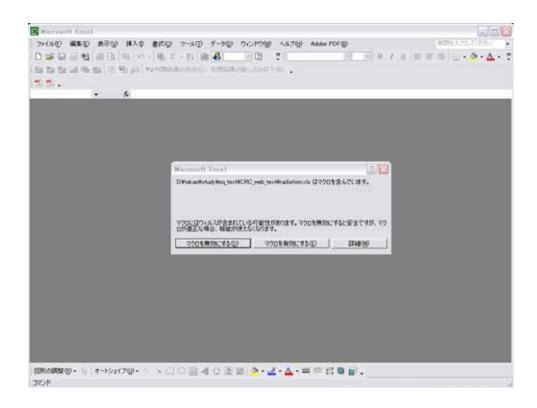


図 - 1 マクロ機能を利用する場合のオープニング・メッセージ

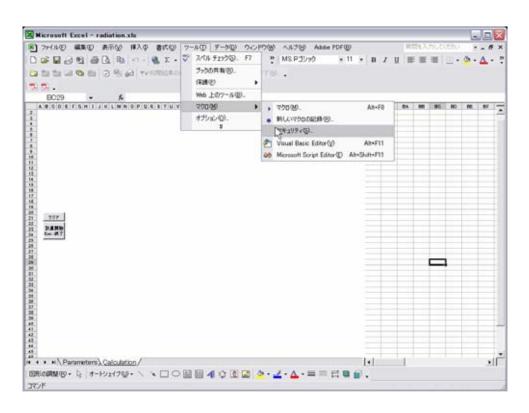


図 - 2 セキュリティの設定を選ぶ(背景テンプレートの内容はファイルによって異なる)

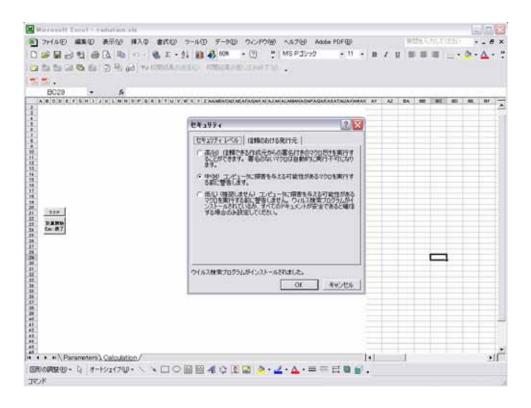


図 - 3 セキュリティ・レベル「中」を選択する(背景の内容はファイルによって異なる)

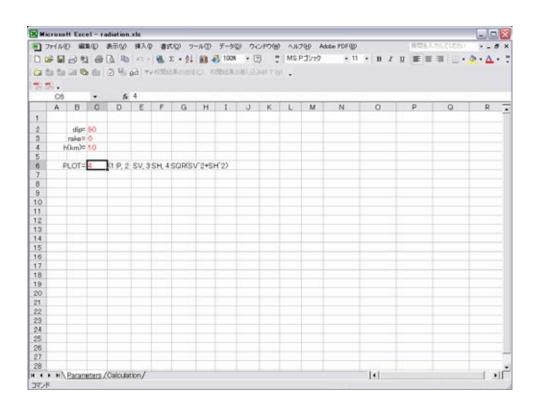


図 - 4 正常にオープンされた状態 (背景の内容はファイルによって異なる)

4)マクロ

計算の中身を更に知りたい場合は、図 - 5のように "Visual Basic Editor" を起動することに

より,図 - 6に示すようにマクロ・プログラムを閲覧・編集することができる。Visual Basic と VBA に習熟している場合は,より効率の良いプログラム化などに挑戦して頂きたい。

なお,筆者はUNIX上のFORTRANコンパイラで開発・計算をおこなうことが常であり,VBAには十分慣れてはいない。(今回の企画で,ずいぶん昔の BASIC によるコーディングを復習しているところである...)また,エクセルも使いこなしているとは言い難い。その点,ここでは非効率なコーディングをおこなっている場合もあると思うので,ご容赦されたい。また,あまり時間を掛けずに作成したものであり,十分な検証をおこなっていない。何かお気づきの点があれば,ご報告頂ければ幸いである。

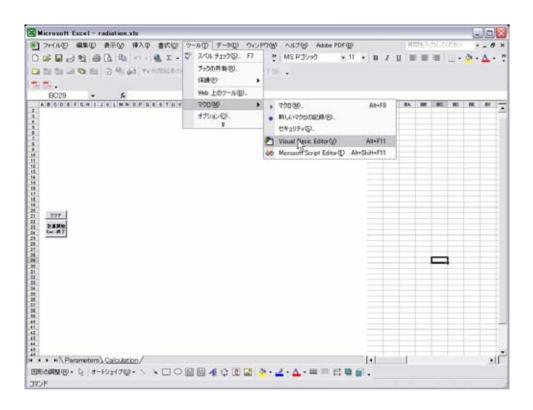


図 - 5 マクロの表示方法 (背景の内容はファイルによって異なる)

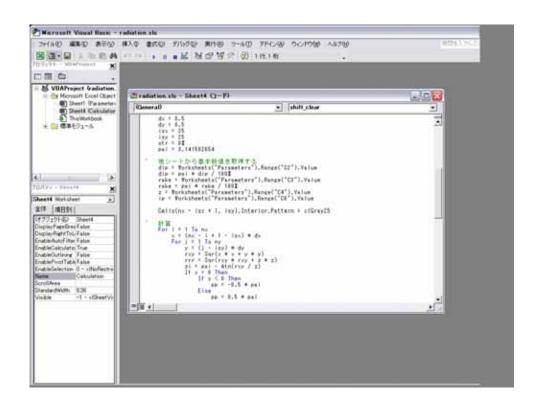


図 - 6 マクロの編集方法(内容はファイルによって異なる)

付録B 点震源からの地震動放射による地表面地震動分布 (radiation.xls)

1)内容

震源断層の幾何学的形状およびすべり方向と,対象としている震源からサイトへの波線方向が設定されれば,ラディエーション係数を数値的に与えることができる。震源とサイトの幾何関係が図 - 1 に示す様な場合, S波 Transverse (F^{SH}), Radial (F^{SV}) 成分および P波 (F^{P}) によるラディエーション特性は,

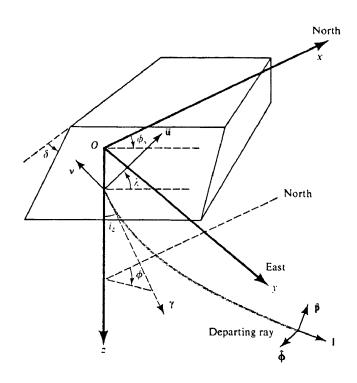


図 - 1 断層とサイトの幾何的関係

$$F^{P} = \cos \lambda \sin \delta \sin^{2} i_{\xi} \sin 2(\phi - \phi_{s}) - \cos \lambda \cos \delta \sin 2i_{\xi} \cos(\phi - \phi_{s})$$

$$+ \sin \lambda \sin 2\delta(\cos^{2} i_{\xi} - \sin^{2} i_{\xi} \sin^{2}(\phi - \phi_{s}))$$

$$+ \sin \lambda \cos 2\delta \sin 2i_{\xi} \sin(\phi - \phi_{s}),$$

$$F^{SV} = \sin \lambda \cos 2\delta \cos 2i_{\xi} \sin(\phi - \phi_{s}) - \cos \lambda \cos \delta \cos 2i_{\xi} \cos(\phi - \phi_{s})$$

$$+ \frac{1}{2} \cos \lambda \sin \delta \sin 2i_{\xi} \sin 2(\phi - \phi_{s})$$

$$- \frac{1}{2} \sin \lambda \sin 2\delta \sin 2i_{\xi} (1 + \sin^{2}(\phi - \phi_{s})),$$

$$F^{SH} = \cos \lambda \cos \delta \cos i_{\xi} \sin(\phi - \phi_{s}) + \cos \lambda \sin \delta \sin i_{\xi} \cos 2(\phi - \phi_{s})$$

$$+ \sin \lambda \cos 2\delta \cos i_{\xi} \cos(\phi - \phi_{s})$$

$$- \frac{1}{2} \sin \lambda \sin 2\delta \sin i_{\xi} \sin 2(\phi - \phi_{s}).$$

$$(1)$$

となる [Aki and Richards(2002)]。S 波はサイトから震源を見た方向に直交した面内で振動することになるが、それを水平方向とその直交方向に分解したものが、Transverse 成分(SH波)とRadial 成分(SV波)に対応する。

ここでは,ある深さに位置する点震源が,南北走向($_{\rm s}$ =0)で,ある傾斜($_{\rm s}$)とあるすべり方向($_{\rm s}$)に破壊した場合に,地表面上でみた地震波の震幅がどのようになるかを図示する。なお,その他に,以下の仮定を置く。

- (1) 震源から地表の計算点まで,地震波はまっすぐに進む。(図-1では深いほど地震波速度が速い仮定で地震波の波線が曲がっているが,震源から地表まで一直線の波線を考える。)
- (2) 震源から地表までの距離 (R) の逆数に比例して (1/R), 地震波の振幅は減衰する。

なお、ここでの目的は上記内容の効果を視覚的に理解することであり、式の意味など詳しい内容には立ち入らない。以下の解説にしたがって、いろいろなケースを試してみることをお勧めする。

猫文

Aki, K. and P. G. Richards(2002), Quantitative seismology -2nd Edition, University Science Books.

2) "Parameters"シート

他のシートから"Parameters"シートに移動した場合,図 - 2のようなメッセージが表示されるが,その際に「OK」をクリックすれば図 - 3の状態になる。"Parameters"シートでは,計算に必要な震源断層の傾斜(dip),すべり方向(rake),深さ(h(km))および表示したい波動の成分(PLOT)を設定する。シート中,赤字で示したものが入力項目である。この時の注意事項を以下に示す。

- (1) 赤字のセルの位置はマクロ・プログラムで参照しているため ,[C2] から [C4] および [C6] のセル位置が変化するようなセル・行・列の挿入・削除をおこなわない。
- (2) 角度は全て度単位で入力する。
- (3) 傾斜は,走向(北:画面上)に向かって右ねじをねじ込む方向で,水平面から測る。
- (4) すべり方向は,走向に向かって右側の断層面がどの方向にすべるかを,走向方向から測る。
- (5) 震源深さを 0 km とするとエラーになるので,ゼロよりも大きい値を入力する。

面的な地震動の大きさ分布を見るだけであれば,表示したい波動成分(PLOT)は「4」が適切である。この場合, Transverse 成分(SH波) と Radial 成分(SV波)をベクトル合成したものが示される。

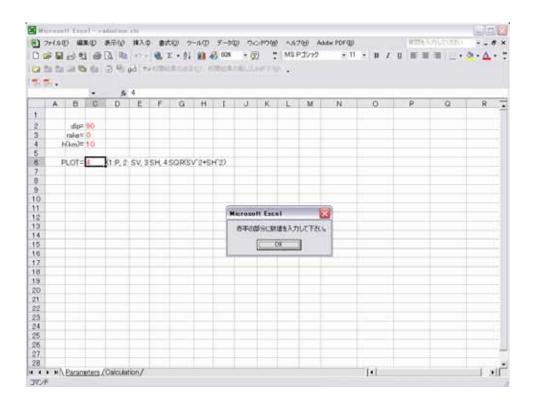


図 - 2 他シートから "Parameters" シートに移動した最初の状態

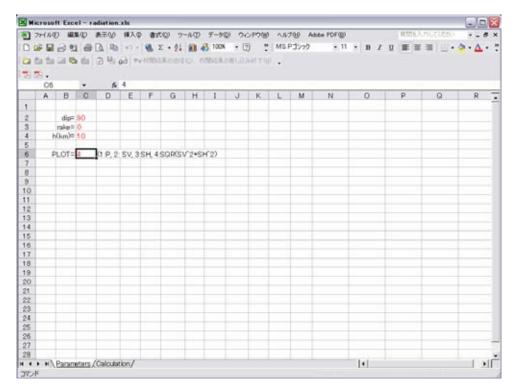


図 - 3 "Parameters"シートが表示された状態

3) "Calculation"シート

"Calculation"シートには入力項目が無いため、他のシートから"Calculation"シートに移動した場合、メッセージが表示されることなく図 - 4の状態になる。ここでは、"Parameters"シートの設定内容に沿って、地表面の地震動分布をマクロによって自動計算する。マクロによる計算は、以下のふたつのボタンによって実行される。

[クリア]: 計算結果を図示した内容をクリアする。

[計算開始]: "Parameters" シートの設定値に基づいて計算された,地表面の地震動分布が表示される。赤が濃いほどプラスに大きく,青が濃いほどマイナスに大きい。また,ボタンを押すと表示される網掛けのセルが震央位置である。なお,計算・表示途中でEscキーを押すことにより,中断できる。

マクロによる計算結果例を図 - 5 ~ 8 に示す。なお , 計算セルの大きさが $0.5 \, \text{km}$ 四方であり , 計算領域は $25 \, \text{km} \times 25 \, \text{km}$ である。

図 - 5:鉛直横ずれ断層の SH 波成分

S波の水平方向成分の分布である。4方向に強く放射されており,それぞれに振動方向が異なる。その方向は,図に矢印で加えたように,その場所から震源を見てどちら方向に回っているかに相当する。(S波は震源を中心とした球殻方向の揺れであり,遠方ではサイトと震源を結んだ方向に直交する平面内の揺れに近似される。)

図 - 6:傾斜逆断層の SV 波成分

S波の鉛直方向成分の分布である。震源直上から上盤に掛けての大きなプラスと下盤のやや小さなマイナスが顕著である。

- 図 7:鉛直横ずれ断層のS波合成
- 図 5 と同じ設定だが SH成分とSV成分をベクトル合成した大きさの分布を描いているため , プラス (赤)の振幅しかなく , SV 波を合わせても震源直上の地震動はゼロである。傾斜が 90 度 かつすべり方向が純粋な横ずれなので左右対称分布であるが , それらを変えると分布形状は変わる。
 - 図-8:傾斜逆断層のS波合成
- 図 6 と同じだが, S 波ベクトル合成振幅の分布を描いているため,プラス(赤)の振幅しかない。傾斜が高角(60度)のため上盤側(右側)の断層が深く,震源直上から上盤に掛けての地震動が大きくなっている。傾斜を低角(例えば 30度)にすると上盤側の断層が浅くなり,上盤側の方が地震動が大きくなる。

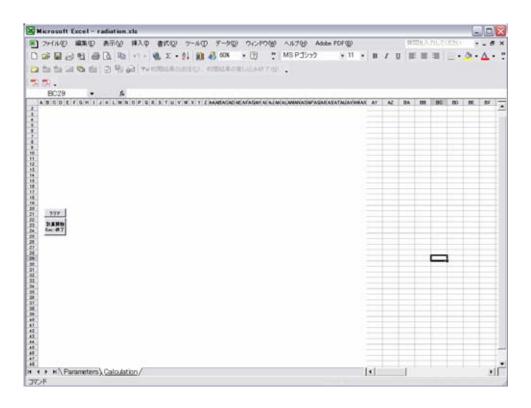


図 - 4 "Calculation"シートが表示された状態

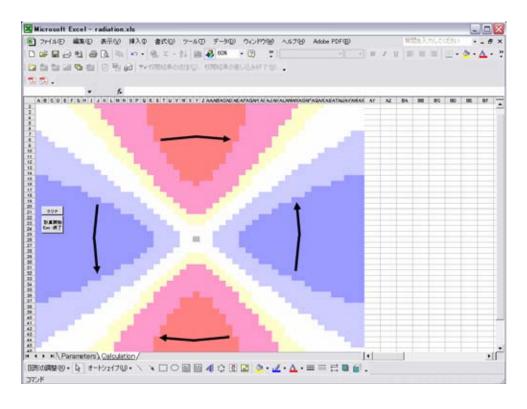


図 - 5 計算例(1)[鉛直横ずれ断層の SH 波成分:dip=90, rake=0, h=10, PLOT=3]

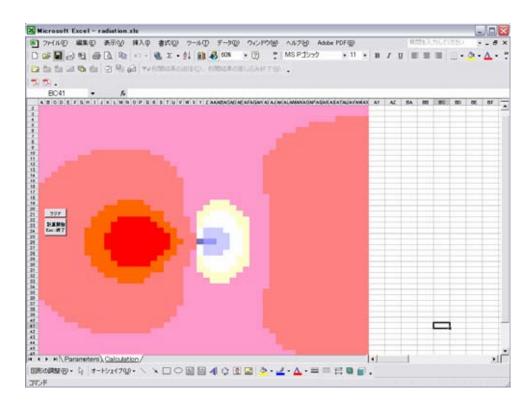


図 - 6 計算例(2) [傾斜逆断層の SV 波成分: dip=60, rake=90, h=10, PLOT=2]

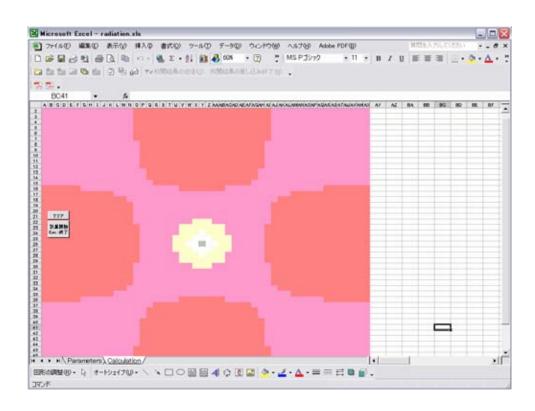


図 - 7 計算例(3)[鉛直横ずれ断層のS波合成:dip=90, rake=0, h=10, PLOT=4]

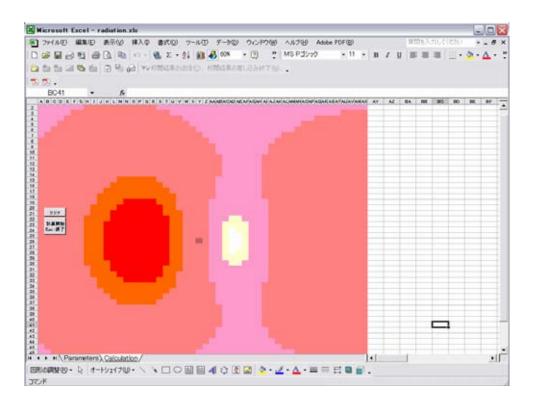


図 - 8 計算例(4)[傾斜逆断層のS波合成:dip=60, rake=90, h=10, PLOT=4]

付録C 移動震源による2次元SH波の伝播(2dfem.xls)

1)内容

ここでは,波動方程式を逐次解いてゆく方法により,点震源から放射される波動伝播の計算を おこなう。

2次元の波動方程式 (空間変数は $x \succeq z$),

$$\frac{\partial^{2} u(x,z,t)}{\partial t^{2}} = c^{2} \left(\frac{\partial^{2} u(x,z,t)}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} u(x,z,t)}{\partial z^{2}} \right)$$
 (1)

の時間領域における差分表現を考える。ここで,U(x,z,t)は位置(x,z),時間 t における x-z 平面に直交する方向の変位であり,c は波動伝播速度を示している。ここで,式(1)の時間・空間位置をともに等分割した時空間を考え,それぞれ以下の様に表す。

$$x = i \times \Delta t$$
 , $i = 1,2,3.....$
 $z = j \times \Delta x$, $j = 1,2,3.....$ (2)
 $t = k \times \Delta z$, $k = 1,2,3.....$

時間に対する,U(x,z,t)まわりの1階微分を差分表現で近似すると,

$$\frac{\partial U(x,z,t+\Delta t)}{\partial t} = \frac{U(x,z,t+\Delta t) - U(x,z,t)}{\Delta t}$$
(3)

$$\frac{\partial U(x,z,t)}{\partial t} = \frac{U(x,z,t) - U(x,z,t - \Delta t)}{\Delta t} \tag{4}$$

となる。これらを用いると2階微分は,

$$\frac{\partial^{2}U(x,z,t)}{\partial t^{2}} = \frac{\frac{U(x,z,t+\Delta t) - U(x,z,t)}{\Delta t} - \frac{U(x,z,t) - U(x,z,t-\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t}$$

$$= \frac{U(x,z,t+\Delta t) + U(x,z,t-\Delta t) - 2 \times U(x,z,t)}{(\Delta t)^{2}}$$
(5)

となる。これは , $(t)^2$ のオーダーの誤差(2次精度)の差分表現にあたる。同様に , $(x)^2$, $(z)^2$ オーダーの誤差で ,

$$\frac{\partial^{2} U(x,z,t)}{\partial x^{2}} = \frac{U(x+\Delta x,z,t) + U(x-\Delta x,z,t) - 2 \times U(x,z,t)}{(\Delta x)^{2}}$$
(6)

$$\frac{\partial^{2} U(x,z,t)}{\partial z^{2}} = \frac{U(x,z+\Delta z,t) + U(x,z-\Delta z,t) - 2 \times U(x,z,t)}{(\Delta z)^{2}}$$
(7)

と表すことができる。したがって , t , x , z を十分に小さくとれば , 最初に示した波動方程式は ,

$$\frac{U(x,z,t+\Delta t) + U(x,z,t-\Delta t) - 2 \times U(x,z,t)}{(\Delta t)^{2}} = c^{2} \left(\frac{U(x+\Delta x,z,t) + U(x-\Delta x,z,t) - 2 \times U(x,z,t)}{(\Delta x)^{2}} + \frac{U(x,z+\Delta z,t) + U(x,z-\Delta z,t) - 2 \times U(x,z,t)}{(\Delta z)^{2}} \right) \tag{8}$$

と差分方程式として表すことができる。(8)式は , U(x,z,t) , U(x,z,t+t) , U(x,z,t-t) , U(x,z,t-t) , U(x,z,t-t) , U(x,z,t-t) , U(x,z,t-t) , U(x,z,t-t) , U(x,t-t) , U(x,t-t) の 7 離散点の値を繋ぐ方程式となっており , 時間 t および (t-t) の既知の 6 値から次の時間ステップ (t+t) における値を得る式となっている。ある外乱 (例えば強制変位)を与えて , (8)式の計算を順次繰り返してゆくことにより , 全体の波動を計算することができる。これが最も単純な差分表現となる。

ここでは,x を水平方向,z を鉛直方向としたある断面(断層面)内に,一定時間間隔毎に断面に直交する方向に外乱(震源)を与え,それによって生じた波動が伝播する様子を計算・表示する。なお,ここでの目的は,時間とともに震源が移動する場合に,移動してゆく方向の波動が大きくなることを視覚的に理解することであり,詳しい内容には立ち入らない。以下の解説にしたがって,いろいろなケースを試してみることをお勧めする。

2) "Parameters"シート

"Parameters"シートでは,計算での設定値を入力する。ここでは,地震波伝播速度と震源移動速度の比が,放射される地震動に及ぼす影響を視覚的に理解することが目的なので,主な入力パラメターはその比(V_R/V_S)である。また,もうひとつの入力値(nplot)は,逐次計算する時間ステップのいくつおきに波動伝播状況を更新するかを指定するものである。エクセルでは,内部計算よりもセルの色を更新する方に時間がかかるため,遅い場合はこの値を大きくすれば良い。なお,パラメータ設定にあたっての注意事項を以下に示す。

- (1) 赤字のセルの位置はマクロ・プログラムで参照しているため ,[C2] および [C3]のセル位置 が変化するようなセル・行・列の挿入・削除をおこなわない。
- (2) VR/VS の比は1よりも少し大きい程度までとし,極端に大きな値を入力しない。
- (3) nplot は1以上,10程度までが適当である。

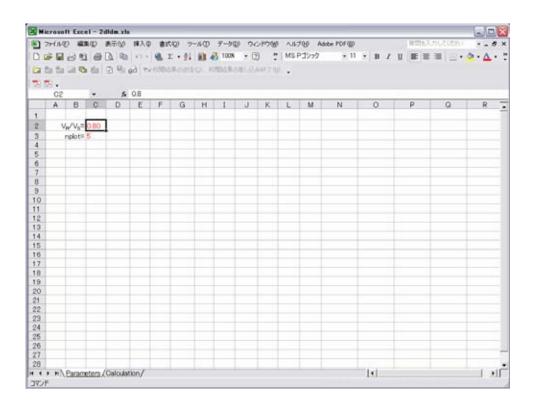


図 - 1 "Parameters"シートが表示された状態

3) "Calculation"シート

他のシートから"Calculation"シートに移動すると、図 - 2の状態になる。ここでは、"Parameters"シートの設定内容に沿って、鉛直な断層面内を震源が移動する場合の波動伝播の様子をマクロによって自動計算する。マクロによる計算は、以下のふたつのボタンによって実行される。

「クリア]:表示された波動伝播状況をクリアする。

[計算開始]: "Parameters" シートの設定値に基づいて計算された,波動伝播の様子が逐次更新されて表示される。赤が濃いほどプラスに大きく,青が濃いほどマイナスに大きい。また,表示される網掛けのセルが順に地震波を放射する震源の位置である。なお,計算・表示途中で Esc キーを押すことにより,中断できる。

マクロによる計算結果例を図 - 3 ~ 5 に示す。

図 - 3: V_R/V_S=0.8 の場合(1)

地震波伝播速度と震源移動速度の比が 0.8 の場合 (一般的な設定)の計算初期の状態。計算領域中央部の震源からの波動が伝播し,右に2番目の震源からの放射が始まっている。

図 - 4: V_R/V_S=0.8 の場合(2)

図 - 3の続きで,計算が終了した状態。震源が近づいた右側で,振動の大きい(赤の濃い)部

分が生じている。また,破壊が遠ざかった左側よりも,近づいた右側の方が振動している領域が 狭い。

図 - 5: V_R/V_S=0.0の場合

震源が全く移動しない設定で計算が終了した状態。どの方向にも同じように波動が伝播しており,図-4に見られた振幅の集中域が見られない。

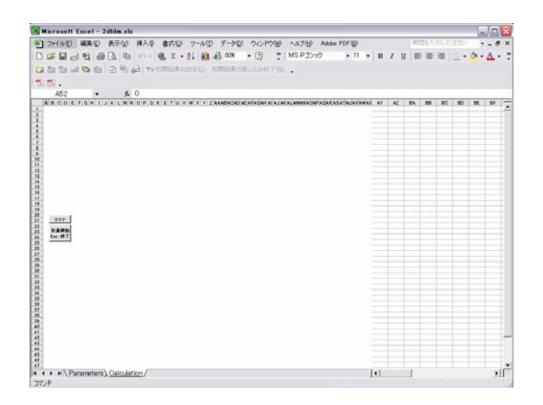


図 - 2 "Calculation"シートが表示された状態

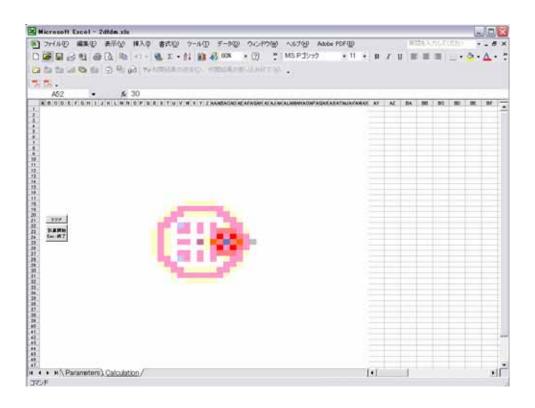


図 - 3 計算例(1) [V_R/V_S=0.8:その1]

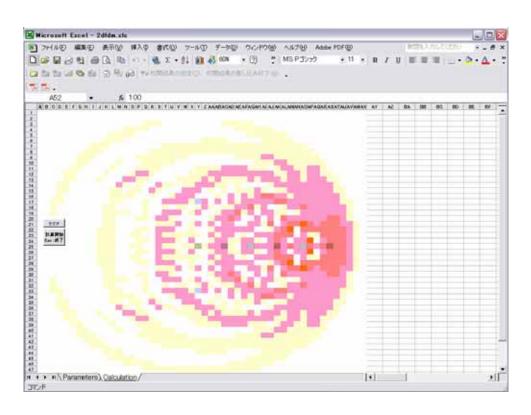


図 - 6 計算例(2) [V_R/V_S=0.8: その2]

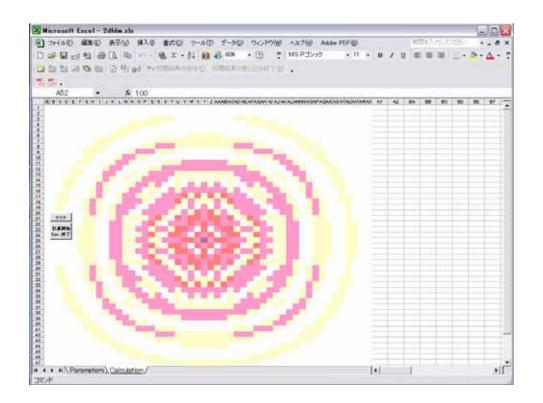


図 - 5 計算例(3) [V_R/V_S=0.0]

Ⅱ 周波数領域での解析

時間領域の波形は、フーリエ変換を介して周波数領域のスペクトルとして扱うことができる。ここでは、そのような取り扱いの基本となる時間領域と周波数領域における考え方について解説する。なお、WEB セミナーには「土木/建築技術者のための基礎から学ぶ振動学」でも同様の内容が丁寧に解説されているので、そちらも併せて参照されることをお勧めする。

1. フーリエ変換

異なる周波数の周期関数を足し合わせることにより、いろいろな波形を形成することができる。ここで、任意の波形に対応する周期関数の組み合わせを得るための手続きがフーリエ変換である。フーリエ変換の基本式では、波形 f(t)に対するスペクトル $F(\omega)$ が、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \ e^{i\omega t} dt \tag{1}$$

として表される。ここで,eは「自然対数の底」と呼ばれる定数(2.71828....)であり,iは虚数単位, $\omega=2\pi f$ は角周波数である。なお, $e^{i\omega t}$ (回転子)は「オイラーの公式」(式(2))により,余弦関数cosと正弦関数sinで表現される。(このあたりの詳細については,次節で述べる。)

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) \tag{2}$$

計算機を用いた数値計算では無限区間の積分ができないので、(1)式は解析をおこないたい有限区間 $(0\sim T)$ を対象とする。

$$F(\omega) = \int_0^T f(t) \ e^{i\omega t} dt \tag{3}$$

式中の回転子 $(e^{i\omega t})$ をオイラーの公式(2)で表現すると、

$$F(\omega) = \int_0^T \left[f(t) \{ \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \} \right] dt \tag{4}$$

となる。これで、波形 f(t)に含まれる(角)周波数毎の成分(スペクトル)が得られることになる。

一方,波形 f(t)はいろいろな周期関数の波の足し合わせで表現できるので、周期関数である余弦関数 cos と正弦関数 sin に、周波数毎のある係数 $A(\omega)$ 、 $B(\omega)$ を掛けた和で表現さ

$$f(t) = \int_0^\infty \left[A(\omega') \cos(\omega't) + B(\omega') \sin(\omega't) \right] d\omega' \tag{5}$$

ただし、この cos、sin 両関数は、ともに始まり(t=0)と終わり(t=T)で連続するものとし、初期位相はゼロとする。つまり、cos は 1 で始まって 1 で終わり、sin は 0 で始まって 0 で終わる。この制限により、cos、sin 両関数が取り得る周期は、全体の長さ T を整数分割した、T/n(n=0,1,2. . . ∞)に限定されることになる。ここで、n=0 の時に周期が無限大、n= ∞ の時に周期がゼロになるため、(5)式の角周波数(ω '=2 π T/n)の積分範囲をゼロから無限大としている。ただし、計算機を用いた数値計算では(5)式は有限区間で実施される(有限フーリエ変換)。

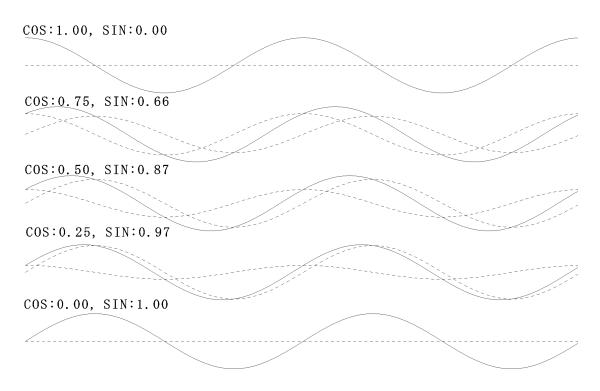


図-1 いろいろな振幅の cos, \sin 両関数の足し合わせ

ここで、(5)式の被積分関数は、初期位相ゼロの \cos 、 \sin 両関数をある割合で足し合わせることに相当する。図-1に示すように、このような足し合わせによって、いろいろな初期位相の周期関数が表現できることが分かる。つまり、波形 f(t)を表現するために必要な、ある周波数における周期関数の振幅と位相が $A(\omega)$ 、 $B(\omega)$ によって表現されることになる。

つまり, 振幅は, $A(\omega')$, $B(\omega')$ の絶対値 $\sqrt{A(\omega')^2 + B(\omega')^2}$ で, 位相は $A(\omega')/\sqrt{A(\omega')^2 + B(\omega')^2}$

と $B(\omega')/\sqrt{A(\omega')^2+B(\omega')^2}$ の割合で示される。

次に、(5)式を(4)式に代入することを考える。その場合、 $\cos \times \cos$ 、 $\sin \times \sin$ 、 $\cos \times \sin$ の 3 通りの積が発生し、それぞれ角周波数が同じ場合($\omega = \omega$ ')とそうでない場合($\omega \neq \omega$ ')がある。ここで、周期関数の性質として、 $\cos \times \cos$ 、 $\sin \times \sin$ は、 $\omega = \omega$ '(周波数が同じ)の場合に限って、

$$\int_{0}^{T} \cos(\omega t) \times \cos(\omega t) dt = \frac{T}{2}$$

$$\int_{0}^{T} \sin(\omega t) \times \sin(\omega t) dt = \frac{T}{2}$$
(6)

となり、周波数の異なる他の組み合わせではいずれも積分結果がゼロになる。また関数の直交性から、 $\cos \times \sin$ もゼロである。図-2に $\cos \times \cos$ の一例を示すが、上段のように同じ角周波数($\omega = \omega$ ')の場合の積は振幅が正の偶関数となり積分が有限値(T/2)となるが、下段のように角周波数が異なる場合($\omega \neq \omega$ ')は積が奇関数となるため積分はゼロになる。したがって、(4)式は、

$$F(\omega) = \frac{T}{2} \left[A(\omega) + iB(\omega) \right] \tag{7}$$

と表すことができ, $F(\omega)$ の実数成分が $A(\omega)$ に,虚数成分が $B(\omega)$ に対応することが分かる。 つまり, この複素数が周波数 f (角周波数 ω) のフーリエ係数に対応し, 振幅が $\sqrt{A(\omega)^2+B(\omega)^2}$, 初期位相が $A(\omega)$ と $B(\omega)$ の比となり, 角度では $\tan^{-1}(B(\omega)/A(\omega))$ となる。

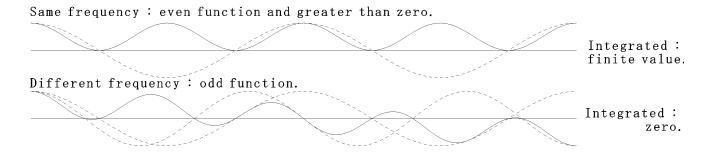


図-2 周期の異なる cos 関数のかけ算

図-1, 2に示したイメージについて視覚的に理解を深めるために, エクセル (Excel は Microsoft 社の登録商標) のテンプレート・ファイル (fourier. xls) を別途添付している (本 章最後の付録A)。参考にされたい。なお,本解説に添付するエクセルのテンプレート・ファイルを利用するにあたっては、第1講「震源断層近傍域の地震動」の付録Aを参照されたい。

2. 回転子

一般に用いられる離散フーリエ変換では、周波数が基本周波数(1/T)の整数倍となる周期 関数の和で場の変動を表現し、個々の周期関数は周波数毎の振幅と位相によって規定される。 このときの周期関数としては、一般に複素指数関数、

$$A \cdot e^{i\omega t} \tag{8}$$

が用いられる。ここで、Aが振幅、 ωt が位相を表し、i は虚数単位である。複素指数関数は (2)式に示した「オイラーの公式」により、実数部を余弦 (コサイン) 関数、虚数部を正弦 (サイン) 関数で表現することができる。

(8)式は、図-3に示すように、実軸と虚軸で構成される単位円(振幅1の円)の円周の回転を表しており、「回転子」とも言う。実数の指数関数が単調な減衰を表していることとは、大きく性格が異なる。この回転による時間変化を実軸上に射影するとコサイン関数となり、虚軸上に射影するとサイン関数となることが、「オイラーの公式」((2)式)から理解される。なお、周期関数を足し合わせて波形を構成する場合など、現実の振動を考える場合には実数部を用いる。ただし、現実の振動としては実数部のみを考慮していても、それは振幅と位相の両方を持っているので、周波数領域では実数部と虚数部を伴って回転しているものの一面を見ていることになる。

「回転子」は、振動を周波数領域で取り扱う際の基底関数となる。回転子を用いることにより、以下のような振動の特徴を簡単に表現することができる。

A)
$$A_1 \cdot \exp(i\omega \ t_1) \times A_2 \cdot \exp(i\omega \ t_2) = (A_1 \times A_2) \cdot \exp(i\omega \ (t_1 + t_2))$$

B) $\frac{d}{dt} \exp(i\omega \ t) = i\omega \ \exp(i\omega \ t)$

(9)

A)では、ある振幅と位相を有する複素指数関数の積は、元の振幅の積に相当する振幅と、元の位相の和にあたる位相を有する複素指数関数となることを示しており、後で述べるシステムの応答を考える際に便利な特徴となっている。一方 B)では、時間微分で位相が 90 度ず

れ (実軸が虚軸になる),振幅が角周波数 (ω) 倍となるものの振動性状は変わらないことを示している。これも,振動を周波数領域で解析する際に便利な特徴である。

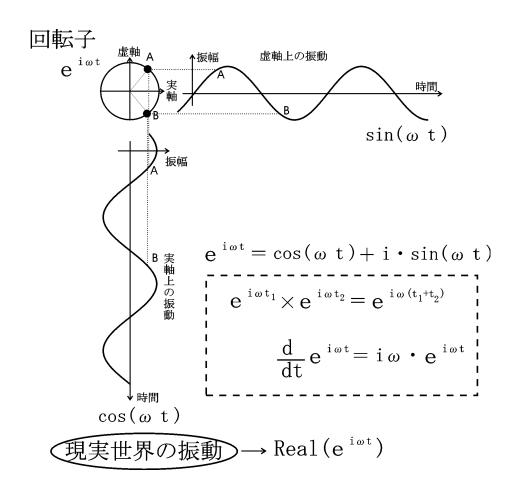


図-3 回転子で表現した周期関数

【コラム】

ちなみに、「オイラーの公式」で $\omega t=\pi$ とすると、

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

が得られる。これは「オイラーの宝石」とも呼ばれるもので、「博士の愛した数式」(小川洋子著)においては、個性的な 3 者(e , π , i)を結びつける象徴的な数式として用いられている。これを図-3 の回転子で見ると、1 回転が 2 π なので、 π は丁度半回転分の位相を示している。したがって回転子は実軸上にあり、実数値が-1、虚数値が0 である。視覚的にも、上記「オイラーの宝石」を理解することができる。

一般に、位相は(8)式や図-3のようにゼロからは始まらない。これを表現するため、時間遅れ t_0 を用いて、

$$A \cdot \exp(i\omega \ (t + t_0)) = A \cdot \exp(i\omega \ t) \cdot \exp(i\omega \ t_0) \tag{10}$$

と表現する。このとき、 ωt_0 を初期位相と称する。つまり、フーリエ変換を施すことにより、時間領域の波形は、振幅と初期位相で規定される周期関数の和に分解されることになる。また、これらの周期関数を足し合わせると、元の波形を構築することができる。

3. 離散フーリエ変換の取り扱い

次に、離散フーリエ変換の重要な特徴に触れておく。波形 f(t)に対する・フーリエ・スペクトルを F(f)とすれば(前述の角周波数 $\omega=2\pi f$ を、係数 2π を略して周波数 f で表現)、

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \ e^{i \ 2\pi \ f \ t} dt \tag{11}$$

がフーリエ変換の基本式である。これを有限区間の離散フーリエ変換で表すと,

$$F(\frac{n}{N \cdot dt}) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kdt) \ e^{i \ 2\pi \ kn/N} dt$$
 (12)

ここで、(11)式に n=N-n を代入すると、

$$F(\frac{N-n}{N \cdot dt}) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kdt) \ e^{i \ 2\pi \ k(N-n)/N} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} f(kdt) \ e^{-i \ 2\pi \ kn/N} e^{i \ 2\pi \ kN/N} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} f(kdt) \ e^{-i \ 2\pi \ kn/N} dt$$
(13)

となる。これは回転子の回転方向を逆に作用させたことになり、振幅が同じで位相が正負逆 になっている。これは実数成分が共通で、虚数成分の符号が逆の作用素(複素共役)に相当 する。したがって,

$$F(\frac{N-n}{N \cdot dt}) = conjg \left[F(\frac{n}{N \cdot dt}) \right]$$
(14)

の関係が阿成り立つ(conjg は複素共役)。つまり,実際にスペクトルで意味を持つのは,n=0(直流成分)~N/2までの半分である。周波数領域では振幅・位相(あるいは実部・虚部)と時間領域に比べて倍の情報が必要だが,結局のところ情報量は同じことになる。n=N/2 の時の周波数は,1/(2dt)(Hz)であり,周期は 2dt(秒)である。これは,振動を表すには,少なくとも周期の半分のサンプリングが必要であることを示している。この限界周波数のことをナイキスト(Nyquist)周波数という。以上の関係を図-4に概念として示す。

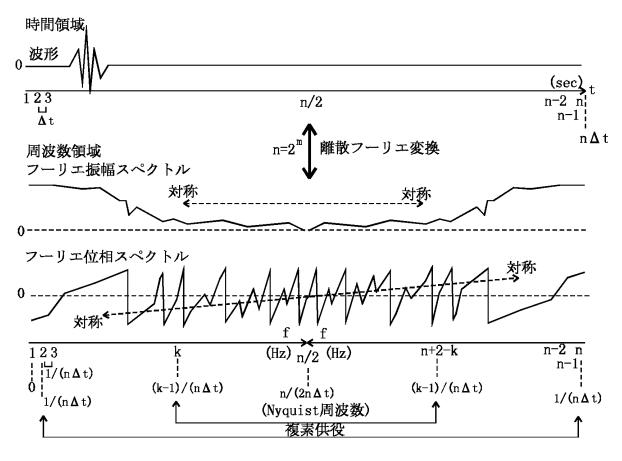
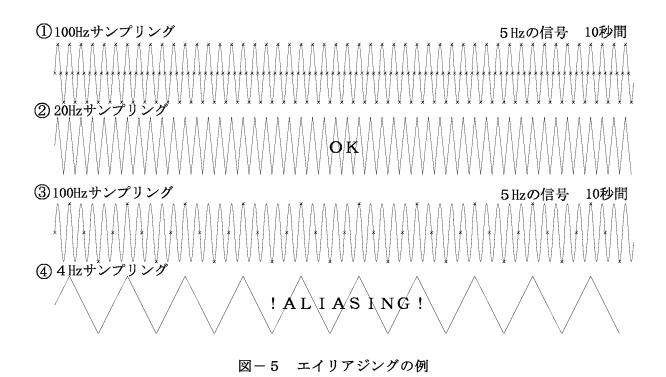


図-4 離散フーリエ変換による波形とスペクトルの対応

離散波形では、ナイキスト周波数よりも高周波数を表現することができないので、離散化の前にこれよりも高周波成分を取り除いておく必要がある。ナイキスト周波数よりも高周波数の成分が含まれている波形を離散化すると、低周波成分に見かけ上の振動が含まれることがある。この現象をエイリアジング(Aliasing)とよび、データ収録の際に注意すべき事柄である。通常は、ナイキスト周波数で信号が無くなるような高周波遮断フィルター(アンチ

エイリアス・フィルター)を施してからサンプリングが行われる。図-5にエイリアジングの例を示す。①,③は 10 秒間の 5Hz 信号を 100Hz サンプリングで表したものである。信号の1周期にサンプリング点が 20 個あるため,滑らかな正弦関数が表現されている。それを 20Hz で再サンプリングしたものが②である。この場合 1 周期あたりのサンプリング数は 4 となり,滑らかな正弦波形にはならないものの 5 Hz の周期関数は再現されている。一方,1 周期当たりのサンプリング数が 2 個以下となる 4 Hz でサンプリングした例が④である。この場合は,5 Hz の周期関数を再現することができず,より長周期の疑似的な周期が生じてしまっている。これがエイリアジングの事例である。



4. インパルス・BOXCAR 波形とスペクトル

次に、瞬間的に大きな値となるインパルス波形とそのフーリエ振幅スペクトルについて検討する。時間ゼロで立ち上がるインパルス波形のフーリエ・スペクトルを図-6に示す。図の左が波形、中央が両対数軸で表したフーリエ振幅スペクトル、右が片対数軸で表したフーリエ位相スペクトルである。この場合、振幅は全周波数で同じ(A_o)であり、位相もゼロで揃っている。

$$A_0 e^0 \tag{15}$$

これは、図-7示すように、位相の揃った部分では振幅がどんどん大きくなり、それ以外 の部分ではいろいろな周期の波が打ち消し合って振幅がゼロになることでインパルスが形成 されているからである。ところで、振幅が全周波数一定で、位相が全くランダムなものを足 し合わせると、全くランダムな波形 (ホワイト・ノイズ) が形成される。このように、位相 が波形に及ぼす影響は大きい。

図-8には、インパルスの発現する時間をずらせた結果を示す。振幅スペクトルは図-6 と同じであるが、位相スペクトルが複雑な様相を呈している。このような波形は、時間ゼロ での位相がずれたものとして、(4)式のように表現することができる。

$$A_0 e^{i\omega t_0} \tag{16}$$

 ωt_0 が位相ずれを表すが、周波数が高い(ω が大きい)ほど位相ずれが大きくなり、周波数によって位相が異なることになる。 ωt_0 は連続的に大きくなって行くが、位相は $0\sim 2\pi$ ($\pi\sim\pi$)の範囲しか取れないので、見掛け上は図-8のように折り返されて見える。

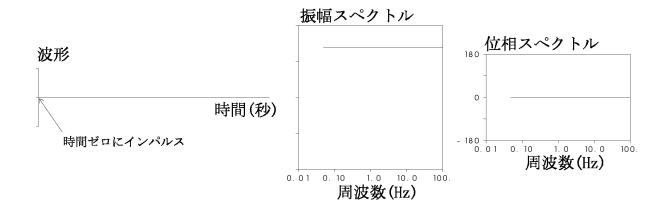


図-6 インパルス波形とそのフーリエ・スペクトル

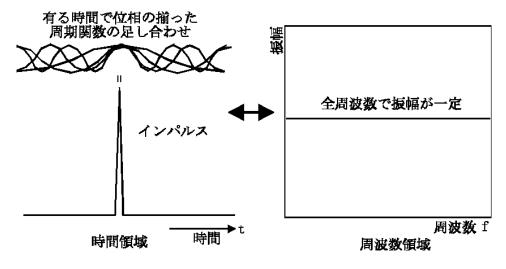


図-7 インパルス波形のフーリエ振幅スペクトルが形成される理由

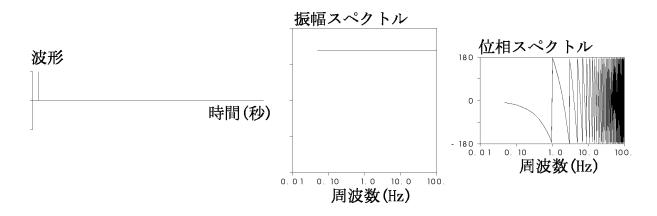


図-8 時間のずれたインパルス波形とそのフーリエ・スペクトル

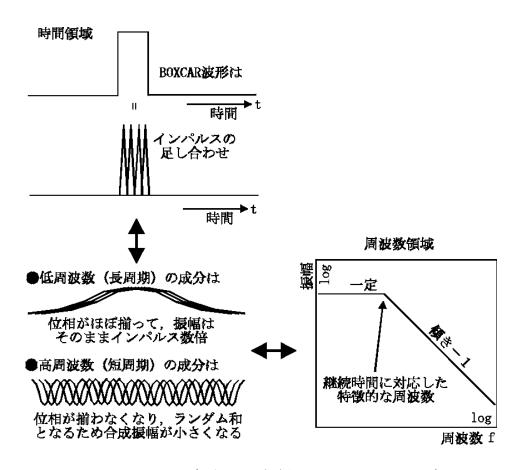


図-9 BOXCAR 波形とその振幅スペクトルのイメージ

次に、図-9に示すように、ある時間間隔だけ振幅を持つBOXCAR 波形の特徴について考える。この波形は、継続時間分だけのインパルス波形の和と考えることができる。この場合、継続時間に対応した周波数よりも低周波数(長周期)では、各インパルスを構成する周期関数の位相の変化が周期よりも小さいために、この周波数成分の振幅は構成するインパルス数の個数分だけ大きくなる。一方、継続時間に対応した周波数よりも高周波数(短周期)では、各インパルスの要素となる周期関数の位相変化が周期よりも大きくなるので、高周波数にな

るほどランダム和となって合成振幅が大きくならない。その結果、特徴的な周期よりも低周波数で一定振幅となり、高周波数で傾き-1のスペクトルとなることが知られている。

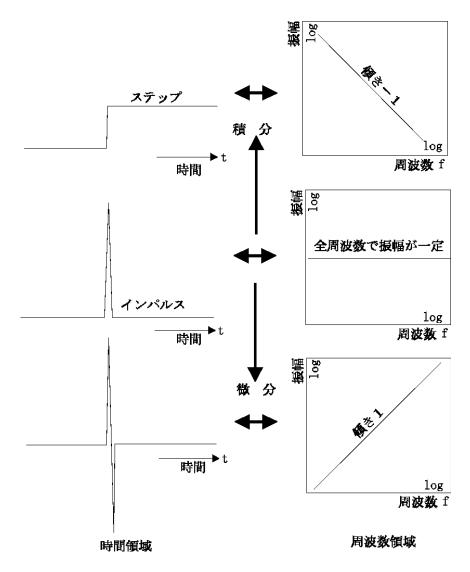


図-10 インパルス波形と振幅スペクトルの微分・積分

5. 波形・スペクトルと微分・積分

さらに、インパルスを微積分した波形とそのフーリエ振幅スペクトルを図-10に示す。図の中段がインパルス波形を、上段がそれを積分したステップ波形、下段が微分した波形を示している。時間領域の積分は波形の面積となるため、インパルスの積分はある瞬間の大振幅にごく短い継続時間を掛けた面積値だけ、瞬間的に変化するステップ波形となる。一方、微分は波形の時間変化の傾きとなるため、立ち上がりの正の傾きから瞬間的に逆の傾きに変化する正負連続したインパルスになる。これをフーリエ振幅スペクトルとして描いたものが図-10の右側に相当する。振幅については、微分は ω を掛けたことに、積分は逆に ω で割ったことに相当する(位相はそれぞれ 90 度ずれる)。その結果、図-10のように両対数軸

で表現すると、元々周波数に依存しない一定振幅の振幅スペクトルが、微分積分を施すことによって、それぞれ傾き+1および-1の直線となる。

積分したステップ波形が傾き-1となることは、図-9に示した BOXCAR 波形の継続時間 (周期) が無限大 (周波数がゼロ) になることを想定すれば理解できる。一方、微分した波形では最小時間刻みで符号の異なるインパルス波形が存在することを想定すればよい。このため、図-11に示すように、長周期成分はほとんど同じ位相で符号の異なるもの(位相が逆のもの)が足し合わされるため、振幅は打ち消し合ってほとんどゼロとなる。一方、短周期成分になるにつれて位相が全く逆ではなく、揃う方向に足し合わされるため振幅が大きくなってゆく。最小時間刻みでは位相が揃うため、振幅が一番大きくなる。このため、短周期で振幅が大きくなるスペクトル形状となることが理解される。

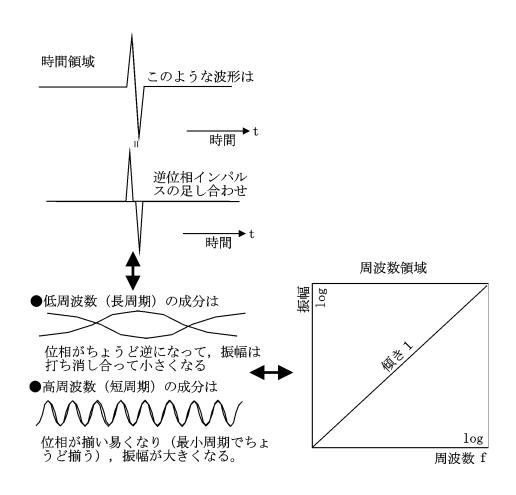


図-11 インパルス微分波形とその振幅スペクトルのイメージ

微積分波形と振幅スペクトルの概念は、地震動の理論を理解するために基礎となる概念である。ただし、数学の手法を用いずにその内容を理解することは難しい。フーリエ解析による周波数領域の内容について平易に理解するためには、例えばトランスナショナル・カレッ

ジ・オブ・レックス(1988)などが入門的なものとなろう。

フーリエ変換と微積分について視覚的に理解を深めるために、高速フーリエ変換(FFT)を利用した離散フーリエ変換 [大崎(1994)] と周波数領域における微積分をおこなうエクセル(Excel は Microsoft 社の登録商標)のテンプレート・ファイル(FFT.xls)を別途添付している(本章最後の付録 B)。参考にされたい。なお、本解説に添付するエクセルのテンプレート・ファイルを利用するにあたっては、第1講「震源断層近傍域の地震動」の付録 Aを参照されたい。

6. 応答

あるシステムによる応答を求めるということは、デルタ関数をシステムに入力した場合の 出力(インパルス・レスポンス)を計算することと同じである。図-12に示すように、デ ルタ関数は位相の揃った周期関数の重ね合わせで表現することができる。つまり、継続時間 の非常に短い衝撃的なインパルスでも、広い周波数に波動のエネルギーを持っていることに なる。周波数毎に分解した(フーリエ変換)の周期関数をシステム(例えば地盤)に入力す ると、その応答によって出力の振幅が変化し、位相がずれる。それらを足し合わせた時間領 域の波形(フーリエ逆変換)はインパルスから変質し、インパルス・レスポンスとして観測 される。

実際の入力波はデルタ関数のような単純なものではなく、周波数毎に振幅がまちまちで、位相も任意の波形である。これがシステムに入力されると、各周波数に特有の応答倍率と位相のずれが生じ、結果として入力波形に対するシステムの応答波形が出力される。この様子を図-13に回転子を用いて示す。このとき、入力波形の振幅と位相がシステムの応答特性によって変化する様子は、周波数領域では複素指数関数の単純な掛け算で表現されることがわかる。このように、周波数領域におけるシステムの応答特性が分かっておれば、任意の入力波形に対する応答波形を即座に計算することができる。つまり、システムの応答による出力波を得るには、

- 1)入射波をフーリエ変換し、周波数毎の振幅と(初期)位相を得る。
- 2) 周波数毎のシステムの応答(振幅変化と位相のずれ)を計算する。
- 3) 1) と2) を掛けて、周波数毎の出力を得る。
- 4) 3) をフーリエ逆変換して出力波を得る。

というプロセスが必要となる。

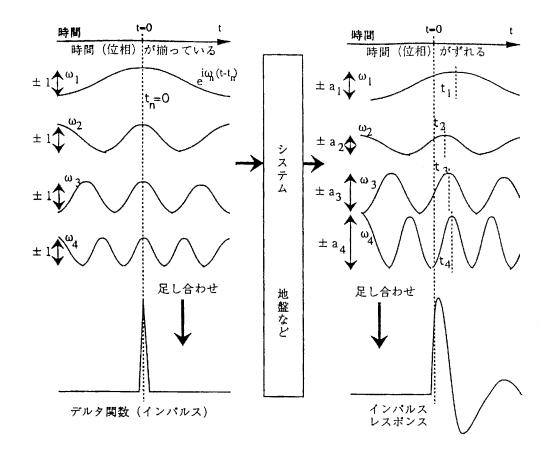


図-12 入力・応答・出力

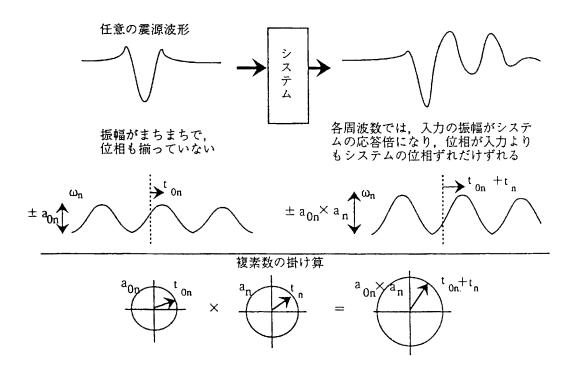


図-13 周波数領域で見たシステムの応答

図-14にBOXCAR波形の振幅を変化させ、位相をずらせるシステムの応答を示す。図の上段が入力、中段がシステムの応答、下段が出力の波形・振幅スペクトル・位相スペクトルをそれぞれ表している。時間をずらせるためには、時間のずれたインパルスを周波数領域で掛け合わせれば良い。このとき、位相がずれたインパルスのフーリエ変換からシステムの周波数応答を計算せずとも、周波数毎に $A_0e^{i\omega t_0}$ (式(16))を掛ければ良い。ここで、 A_0 は振幅倍率、 t_0 は時間ずれを表している。

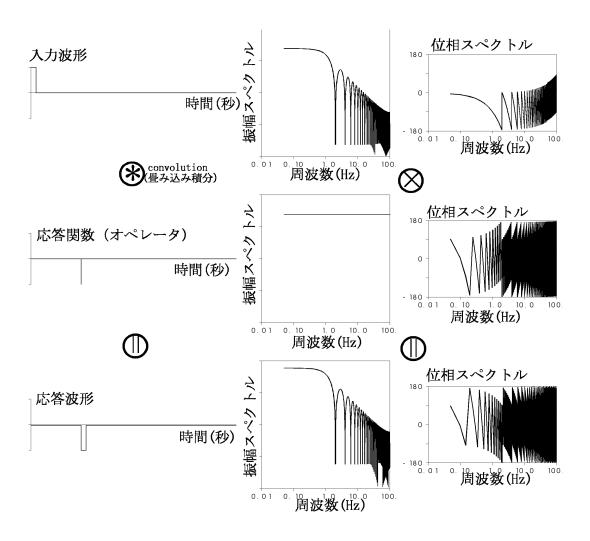


図-14 BOXCAR 波形の振幅を変化させ時間をずらせた例

7. 参考文献

小川洋子:博士の愛した数式,新潮社,2003.

大崎順彦:新・地震動のスペクトル解析入門,鹿島出版会,1994.

トランスナショナル・カレッジ・オブ・レックス編:フーリエの冒険, 1988.

付録A COS 関数・SIN 関数の和と積(fourier. xls)

1)内容

"Cos & Sin"シートは、本文図-1に示した、同じ周期で初期位相がゼロの余弦関数 (cos) と正弦関数 (sin) を適当な割合で足し合わせると、振幅が同じで初期位相の異なる三角関数となることを、いろいろな場合で試せるようにしたものである。

また, "Multi"シートは,本文図-2に一例を示した,位相がゼロで周期の異なる余弦関数 (cos)と正弦関数 (sin)の積とその積分を,いろいろな場合で試せるようにしたものである。

2) "Cos & Sin" シート

他のシートから "Cos & Sin" シートに移動した場合、図-1のようなメッセージが表示されるが、その際に「0K」をクリックすれば図-2の状態になる。

このシートの入力値は、余弦関数 (cos) の割合のみである。この値は 0 から 1 の範囲である必要がある。正弦関数 (sin) の割合は、両者の 2 乗和が 1 になるように、自動的に設定される。マクロによる計算は、以下のふたつのボタンによって実行される。

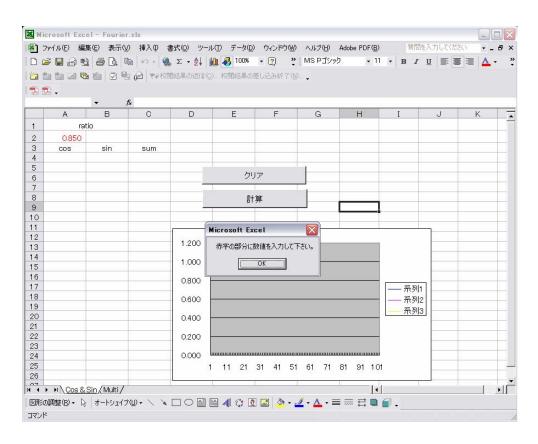


図-1 他シートから "Cos & Sin" シートに移動した最初の状態

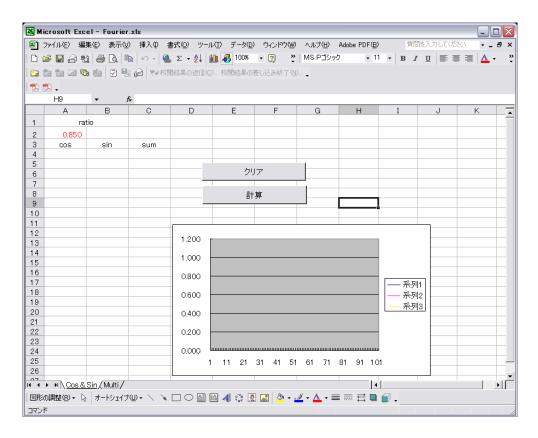


図-2 "Cos & Sin" シートが表示された状態

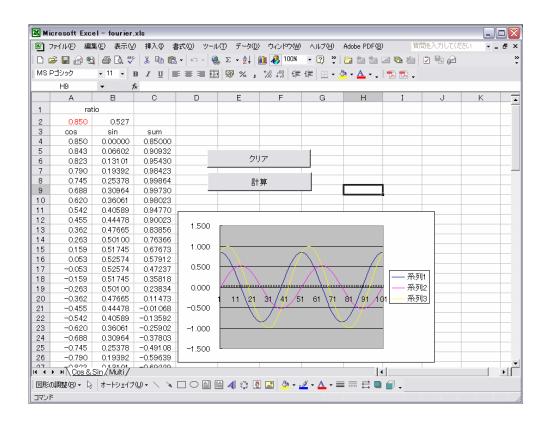


図-3 "Cos & Sin" シートの計算結果例

[クリア]:計算結果とそれを図示した内容をクリアする。

[計算]:入力値に基づいて計算された波形を,余弦関数(cos)を青,正弦関数(sin)を赤,その和を黄色で表示する。

マクロによる計算結果例を図-3に示す。

3) "Multi" シート

他のシートから"Multi"シートに移動した場合、赤字の部分に入力を促すメッセージが表示されるが、その際に「OK」をクリックすれば図-4の状態になる。

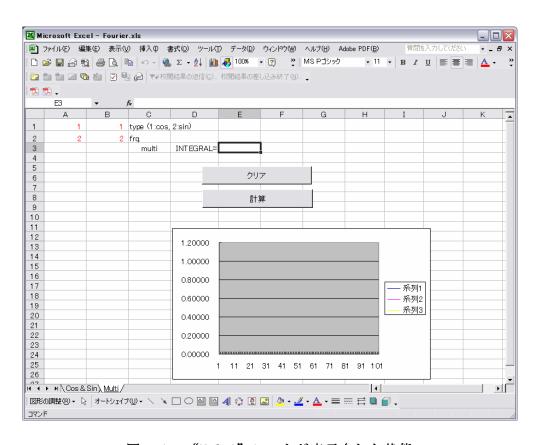


図-4 "Multi"シートが表示された状態

このシートの入力値は、掛け算をおこなうふたつの三角関数の種類 (1: 余弦関数 (\cos) , 2: 正弦関数 (\sin)) および,その周波数である。周波数についいては,計算時間全体を何分割するかの「整数」で入力する。なお,計算時間全体を 100 分割して表現しているため,周波数は最小値を 1 とし,最大で 10 程度を用いることが望ましい。マクロによる計算は,以下のふたつのボタンによって実行される。

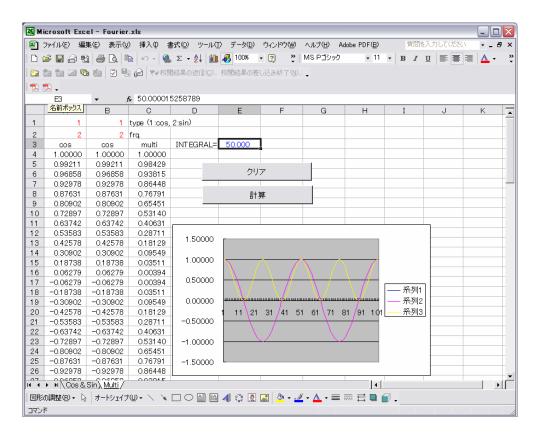


図-5 "Multi" シートの計算結果例(1)

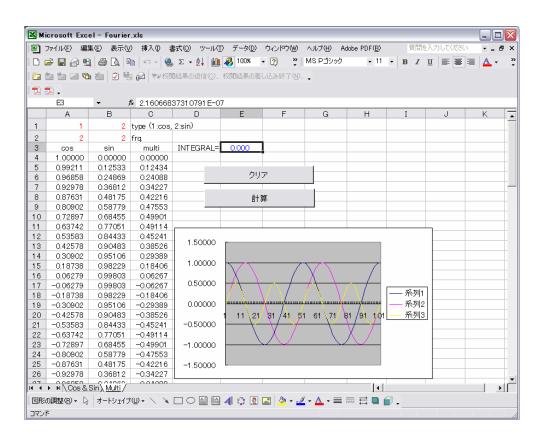


図-6 "Multi" シートの計算結果例(2)

[クリア]:計算結果とそれを図示した内容をクリアする。

[計算]:入力値に基づいて計算された波形を、A列の設定関数を青、A列の設定関数を赤、 その積を黄色で表示する。なお、計算時間全体を積分した結果をE列に青字で表 示する。

マクロによる計算結果例を図-5,6に示す。

○図-5:同じ周波数の余弦関数 (cos)

青と赤の波形は重なっている。黄色の波形は偶関数となり、積分値は 50 (計算時間全体である 100 の半分) となっている。

○図-6:同じ周波数の余弦関数 (cos) と正弦関数 (sin) 黄色の波形は奇関数となり、積分値はゼロとなっている。

付録B 高速フーリエ変換と周波数領域の微積分(FFT. x Is)

1)内容

高速フーリエ変換のコードとして代表的な,大崎(1994)による FORTRAN サブルーチン fast を,VBA に移植して用いている。その際,オリジナルの複素数表現を,実数と虚数による表現に改め,複素関数を導入しないでも利用できるようにしている。なお,高速フーリエ変換のイメージを平易に理解するためには,例えばトランスナショナル・カレッジ・オブ・レックス(1988)などが参考となろう。

なお、例題においては、高速フーリエ変換を実用する場合に考慮すべき注意点について触れている。

文献

大崎順彦:新・地震動のスペクトル解析入門,鹿島出版会,1994.

トランスナショナル・カレッジ・オブ・レックス編:フーリエの冒険, 1988.

2) "FFT" シート

他のシートから"FFT"シートに移動した場合、図-1のようなメッセージが表示されるが、 その際に「OK」をクリックすれば図-2の状態になる。

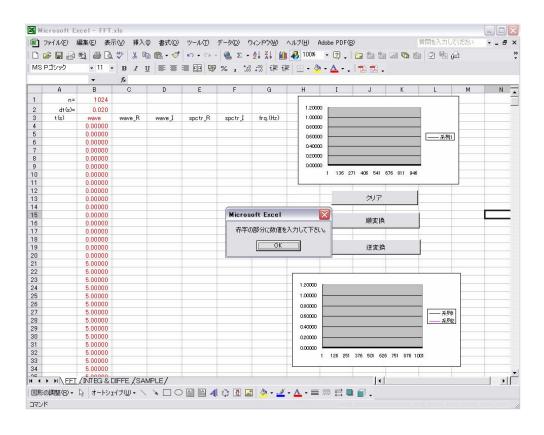


図-1 他シートから "FFT" シートに移動した最初の状態

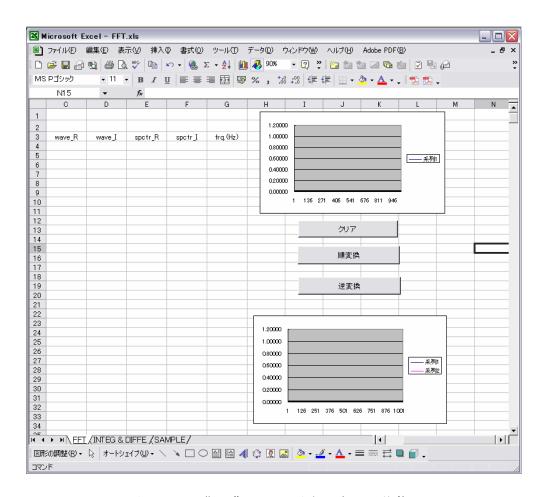


図-2 "FFT"シートが表示された状態

このシートの入力値は、対象波形の離散点数、離散時間間隔、波形データである。なお、の離散点数は、高速フーリエ変換の制約から2のn乗個である必要がある。波形データは任意のものを、B列4行以下に時間刻み毎に並べることができる。マクロによる計算は、以下の3つのボタンによって実行される。

[クリア]:計算結果とそれを図示した内容をクリアする。

[順変換]:入力波形を複素数の実数部(wave_R)にコピーし、虚数部(wave_I)にゼロを入力した後に、そのデータをフーリエ変換して離散点数で割った値を、周波数領域の実数部(spctr_R)と虚数部(spctr_I)に示す。また、波形の対応時間とスペクトルの対応周波数を示す。併せて、波形(wave_R)および周波数領域の実数部(spctr_R)と虚数部(spctr_I)を図示する。

[逆変換]:周波数領域の実数部 (spctr_R) と虚数部 (spctr_I) を入力としてフーリエ逆変換をおこない,その結果 (時間領域の波形) を実数部 (wave_R) と虚数部 (wave_I) に示す。逆変換後,波形の実数部 (wave_R) と虚数部 (wave_I) は青字となる。

マクロによる計算結果例を図-3,4に示す。

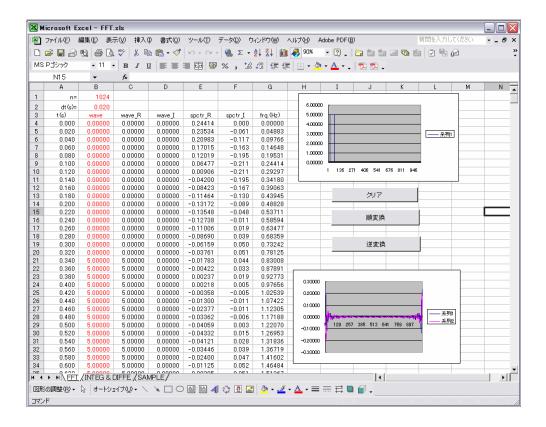


図-3 "FFT"シートの計算結果例(1)

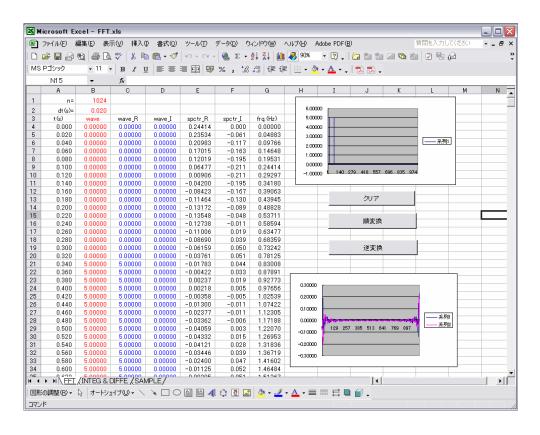


図-4 "FFT" シートの計算結果例(2)

○図-3:順変換

BOXCAR 波形のフーリエ変換例である。青で示される周波数領域の実数成分は左右で線対称となっているのに対して、赤で示される虚数成分は点対称となっており、本文(14)式および本文図-4で示したように、ナイキスト周波数で折り返した半分同士が複素共役となっていることが分かる。

○図-4:逆変換

元と同じ BOXCAR 波形に戻っていることが分かる。

"SAMPLE"シートにいくつかの波形例を添付しているが、必要に応じて任意の波形を試されれば良いと思う。ただし、添付した VBA プログラムでは離散点数の最大を 4096 個に制限しているので、注意が必要である。

3) "INTEG & DIFFE"シート

他のシートから"INTEG & DIFFE"シートに移動した場合,赤字の部分に入力を促すメッセージが表示されるが、その際に「OK」をクリックすれば図-5の状態になる。

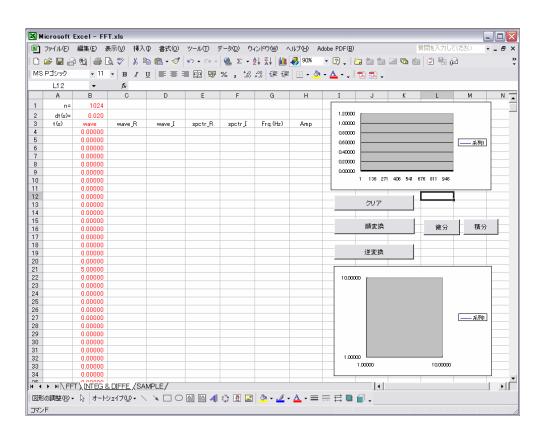


図-5 "INTEG & DIFFE"シートが表示された状態

このシートの入力値は、対象波形の離散点数、離散時間間隔、波形データである。なお、の離散点数は、高速フーリエ変換の制約から2のn乗個である必要がある。波形データは任意のものを、B列4行以下に時間刻み毎に並べることができる。マクロによる計算は、以下の5つのボタンによって実行される。

「クリア」:計算結果とそれを図示した内容をクリアする。

[順変換]: "FFT"シートの[順変換]とほぼ同じ機能を持つ。ただし、周波数領域の振幅値を別途計算し、フーリエ振幅スペクトルを図示する。

[逆変換]: "FFT"シートの[逆変換]と同じ機能を持つ。

[微分]:周波数領域の実数部(spctr_R)と虚数部(spctr_I)のそれぞれに ω ($2\pi \times$ 周波数)を掛け、周波数領域で微分を実行する。フーリエ振幅スペクトルの傾きが変化することに注目。ただし、周波数ゼロおよびナイキスト周波数には実数部(spctr_R)と虚数部(spctr_I)にゼロを与えている点に注意。

[積分]:周波数領域の実数部(spctr_R)と虚数部(spctr_I)のそれぞれを ω ($2\pi \times$ 周波数)で割り、周波数領域で積分を実行する。フーリエ振幅スペクトルの傾きが変化することに注目。ただし、周波数ゼロおよびナイキスト周波数には実数部(spctr_R)と虚数部(spctr_I)にゼロを与えている点に注意。

マクロによる計算結果例を図-6~10に示す。

○図-6:インパルス関数のフーリエ変換

本文図-10で示したように、インパルスのフーリエ振幅スペクトルは周波数によらず一定値となっている。なお、インパルスは片側だけに振幅を持つため、周期関数の和だけでは表現できない。このため、周波数ゼロ(直流成分)の実数部(spctr_R)が値を持っていることに注目されたい。

○図-7:図-6の状態から周波数領域で微分

本文図-10で示したように、微分すると両対数軸で見たフーリエ振幅スペクトルの傾きは1となる。周波数ゼロ(直流成分)およびナイキスト周波数のスペクトル値にゼロを与えている。

○図-8:図-7の状態からフーリエ逆変換

基本的には、本文図-10で示したように、もともとインパルスのあった時刻の振幅がゼロで、そこを中心に点対象なふたつのインパルスが構成されようとしている。ただし、周波数ゼロ(直流成分)およびナイキスト周波数でゼロ振幅を与えていること、1ステップで変化するインパルスを離散フーリエ変換では完全に表現できないことの理由により、本文図-10に示した理論通りの波形とはなっていない。微分ではこれらのうち高周波数の問題点が顕著に現れ、微分波形に高周波数の振動(リップル)が見られる。この点は、離散フーリエ

変換を実務に利用するにあたってわきまえておくべき制約である。

○図-9:図-6の状態から周波数領域で積分

本文図-10で示したように、積分すると両対数軸で見たフーリエ振幅スペクトルの傾き は-1となる。周波数ゼロ(直流成分)およびナイキスト周波数のスペクトル値にゼロを与 えている。(周波数ゼロの積分はゼロ割りとなってしまう。)

○図-10:図-9の状態からフーリエ逆変換

基本的には、本文図-10で示したように、もともとインパルスのあった時刻で立ち上がるステップ波形が構成されようとしている。ただし、周波数ゼロ(直流成分)およびナイキスト周波数でゼロ振幅を与えていること、1ステップで変化するインパルスを離散フーリエ変換では完全に表現できないことの理由により、本文図-10に示した理論通りの波形とはなっていない。積分ではこれらのうち低周波数の問題点が顕著に現れ、積分波形のゼロ線がシフトし、またはじめと終わりを同じ値で繋ぐために単調減少する直線が生じている。もともと、はじめと終わりの値が異なるステップ関数は、離散フーリエ変換ではうまく表現できないことが分かる。この点は、離散フーリエ変換を実務に利用するにあたってわきまえておくべき制約である。

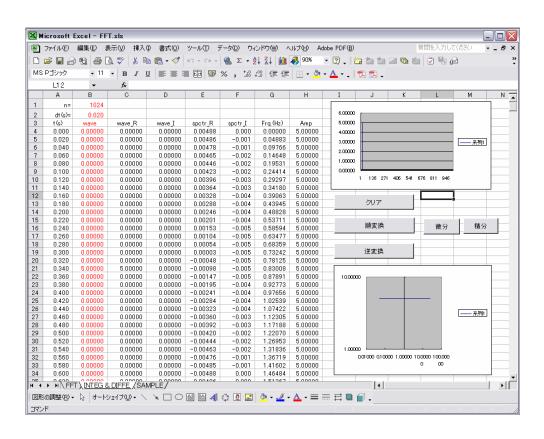


図-6 "INTEG & DIFFE" シートの計算結果例(1)

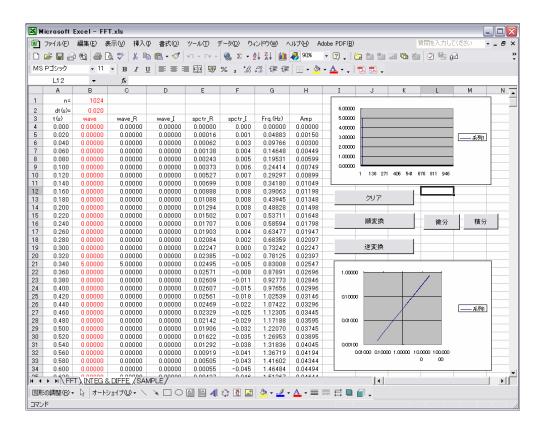


図-7 "INTEG & DIFFE" シートの計算結果例(2)

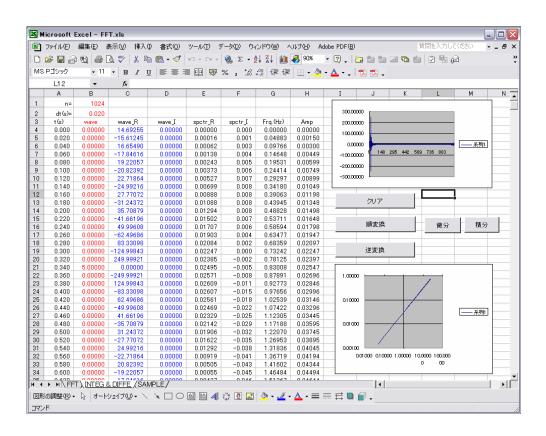


図-8 "INTEG & DIFFE" シートの計算結果例(3)

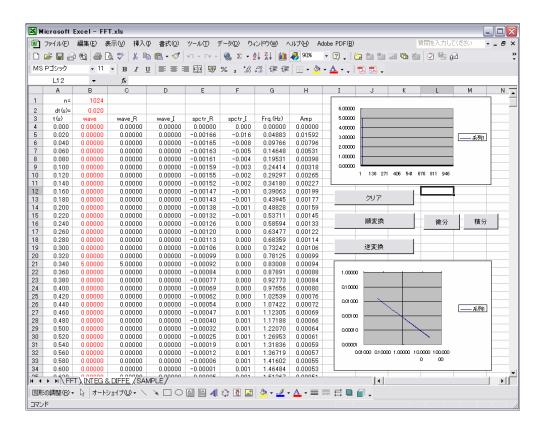


図-9 "INTEG & DIFFE" シートの計算結果例(4)

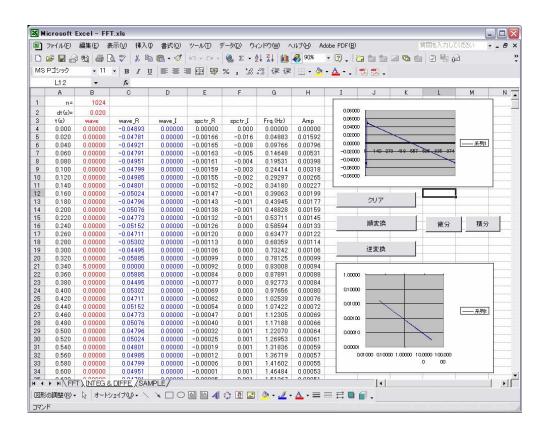


図-10 "INTEG & DIFFE" シートの計算結果例(5)

"SAMPLE"シートにいくつかの波形例を添付しているが、必要に応じて任意の波形を試されれば良いと思う。ただし、添付した VBA プログラムでは離散点数の最大を 4096 個に制限しているので、注意が必要である。

1自由度系の応答

1.1自由度系

図 - 1 に示すようなバネ - マス(錘)のシステムを考える。これは1方向にのみ運動するので1自由度系と呼ばれる。1自由度系の応答は、地震系の原理や応答スペクトルを考える上での基礎となる。

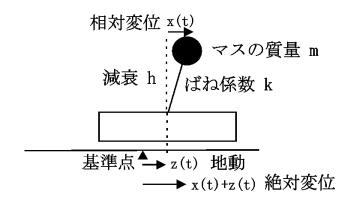


図 - 1 パネ - マスの1自由度系

いま,図-1に示す諸定数で定義される1自由度系を考える。この運動方程式は,

$$m(\ddot{x}(t) + \ddot{z}(t)) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0 \tag{1}$$

と表される。 \dot{x} , \ddot{x} などは,それぞれ時間微分(速度,変位)を表している。ここで,系の固有角周波数を $_0$ とすると,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2}$$

の関係がある。また,減衰係数は,一般に用いられる h を用いて,

$$2h\omega_0 = \frac{c}{m} \tag{3}$$

と書くことができる。以下、この運動方程式の解き方を述べる。

2.時間領域での計算法

時間領域では,通常良く用いられる線形加速度法を用いる。これは,ある時間間隔(例えば t)の間に加速度が1次関数で変化することを仮定したものである。これを数式で表現す

ると,

$$\ddot{x}(t+\tau) = \ddot{x}(t) + \frac{\ddot{x}(t+\Delta t) - \ddot{x}(t)}{\Delta t}\tau\tag{4}$$

となる。ここで, $\ddot{x}(t)$ は時間 t におけるマスの加速度, $\ddot{x}(t+\Delta t)$ は時間(t+ t)における加速度, はt から(t+ t)の間の時間を表している。これを で順次積分すると,

$$\dot{x}(t+\tau) = \dot{x}(t) + \ddot{x}(t)\tau + \frac{\ddot{x}(t+\Delta t) - \ddot{x}(t)}{2\Delta t}\tau^2$$
(5)

$$x(t+\tau) = x(t) + \dot{x}(t)\tau + \frac{\ddot{x}(t)}{2}\tau^2 + \frac{\ddot{x}(t+\Delta t) - \ddot{x}(t)}{6\Delta t}\tau^3$$
 (6)

が得られる。ここで, = t とすると, (5), (6)式から,

$$\dot{x}(t + \Delta t) = \dot{x}(t) + \frac{\ddot{x}(t) + \ddot{x}(t + \Delta t)}{2} \Delta t \tag{7}$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \frac{\ddot{x}(t)}{3}\Delta t^2 + \frac{\ddot{x}(t + \Delta t)}{6}\Delta t^2$$
(8)

を得ることができる。(7),(8)式を(1)式に代入して整理すると,現在時刻tの加速度,速度,変位,および次の時刻(t+t)の入力加速度から,次の時刻の加速度を得る式,

$$\ddot{x}(t + \Delta t) = \frac{-\ddot{z}(t + \Delta t) - \frac{c}{m}[\dot{x}(t) + \frac{\ddot{x}(t)}{2}\Delta t] - \frac{k}{m}[x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \frac{\ddot{x}(t)}{3}\Delta t^{2}]}{1 + \frac{c}{2m}\Delta t + \frac{k}{6m}\Delta t^{2}}$$
(9)

が得られる。初期条件を,

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0 \tag{10}$$

として(7),(8),(9)式を逐次計算することにより,1自由度系の応答波形を計算することができる。

3.周波数領域での計算法

次に,(1)式の運動方程式を周波数領域で解くことを考える。地動および応答をいろいろな

周波数の周期関数の足し合わせで表現できるとし,ある角周波数 ()に分解した地動加速度を,

$$\ddot{z}(t) = e^{i\omega t} \tag{11}$$

と表現する(振幅1,位相遅れなし)。これに対して,相対応答を,

$$\ddot{x}(t) = A \cdot e^{i\omega t} \tag{12}$$

とし, 複素数 A が振幅および位相の変化(応答)を表すものとする。これを順次積分すると,

$$\dot{x}(t) = \frac{A}{i\omega} \cdot e^{i\omega t} \tag{13}$$

$$x(t) = -\frac{A}{\omega^2} \cdot e^{i\omega t} \tag{14}$$

となり,これらを(1)式に代入すると,

$$[(1+A) + \frac{c}{m}\frac{A}{i\omega} - \frac{k}{m}\frac{A}{\omega^2}] \cdot e^{i\omega t} = 0$$
(15)

が得られる。これが $e^{i\omega t}$ に対して恒等的に成り立つ条件を整理し、

$$A = \frac{-1}{1 - \frac{k}{m\omega^2} - \frac{ic}{m\omega}} \tag{16}$$

を得る。地動をフーリエ変換したものと(15)式の応答を,それぞれの角周波数で掛け合わせて逆フーリエ変換することにより,応答波形を得ることができる。この時,応答振幅と位相角は,それぞれ以下のように表される。

$$A = \frac{-1}{1 - \frac{k}{m\omega^2} - \frac{ic}{m\omega}} \tag{17}$$

$$\beta = -\tan^{-1} \left\{ \frac{-c/(m\omega)^2}{1 - k/(m\omega)^2} \right\}$$
 (18)

4.計算例

上述の内容をプログラム化した実行結果を図 - 2 に示す。当然であるが, どちらも同じ応答波形が計算されている。なお, 応答波形は地動を加えた絶対応答になっている点に注意されたい。

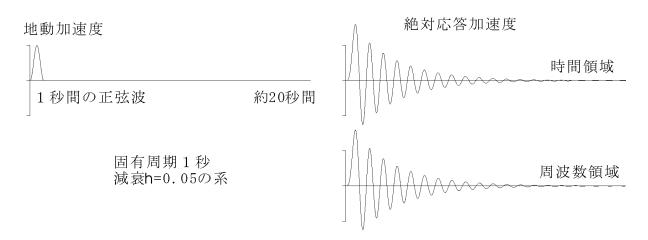


図 - 2 時間領域と周波数領域の解の比較例

時間領域と周波数領域の応答について視覚的な理解を深めるために,上記計算法,およびそれを基にして以下に述べる応答スペクトルおよび地震計の特性に関するエクセル(Excelは Microsoft 社の登録商標)のテンプレート・ファイル(response.xls)を別途添付している(本章最後の付録 A)。参考にされたい。なお,本解説に添付するエクセルのテンプレート・ファイルを利用するにあたっては,第1講「震源断層近傍域の地震動」の付録 A を参照されたい。

5.応答スペクトル

地震観測記録の特徴を評価するためには,波形情報だけではなく周期(周波数)特性に着目する必要がある。地震動の周期特性はフーリエ・スペクトルで表現されるが,設計などの工学的判断に必要な,地震動が構造物に及ぼす影響を簡潔に読みとることが困難である。このため,工学の分野では応答スペクトルを用いて周期(周波数)毎の地震応答の特性を評価することが多い。

応答スペクトルは,図-3に示すように,いろいろな固有周期(固有周波数)の1自由度振動系(バネ-マス振動系)に地震波形を入力し,それぞれの応答振幅の最大値を系の固有周期毎に並べたものである。このような振動系システムの応答は,前述のように計算すれば良い。このとき,振動系の減衰が小さければ固有周期付近のみで大きな応答を示し,減衰が大きければ固有周期付近の応答が鈍る代わりに広い周期帯の影響を受けるようになる。応答

スペクトルを計算する際の減衰(構造物の減衰)は,対象とする構造物に合わせて決めるべきであるが、地震波形の標準的な特性を見ることを目的とした場合には,5%の減衰(h=0.05)が用いられることが多い。

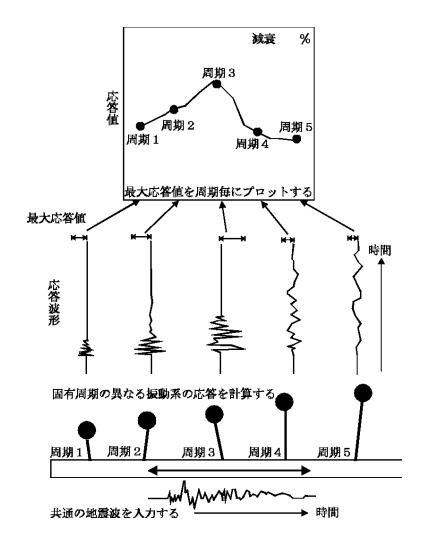


図-3 応答スペクトルの概念

応答スペクトルを算出するプロセスは、1自由度振動系をフィルターとして、その固有周期付近の振動性状を取り出していることと等価である。このように、応答スペクトルは1自由度振動系に近似した構造物の最大応答値を与えるため、耐震設計などの工学分野で利用し易い。ただし、応答スペクトルは、フーリエ・スペクトルと同様に地震波形の特徴を表したものであり、構造物の特性を表したものではない点に注意すべきである。

応答スペクトルには,最大応答値を変位・速度・加速度で表したもの,またそれぞれの応答を相対応答と絶対応答で表したもの,と合計 6 種類が定義される。相対応答と絶対応答については、図 - 4 に示した地動とおもりの動きの関係が参照できる。絶対応答で考えた場合,振動系の固有周期よりも長周期の地動では,おもりは地面と一体にゆっくり動くので,おも

りの絶対応答は地面の動きと同じである。一方,固有周期よりも短周期では,おもりは慣性的に静止してしまうので,おもりの絶対応答は極めて小さくなる。振動系の固有周期付近の応答は,相対応答も絶対応答も大きい。

図 - 4 地動の周期とおもりの動き

6種類の応答スペクトルのうち,実際に良く用いられているのは絶対加速度応答スペクトル・相対速度応答スペクトル・相対変位応答スペクトルである。単に加速度・速度・変位応答スペクトルとしている場合は,上記3種を示していると考えて良い。

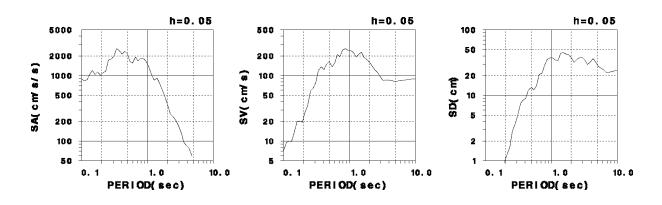


図 - 5 神戸海洋気象台波 NS 成分の絶対加速度(SA)・相対速度(SV)・ 相対変位応答(SD)スペクトル

図 - 5 には,平成7年兵庫県南部地震で得られた神戸海洋気象台の南北成分波形の絶対加速度応答スペクトル・相対速度応答スペクトル・相対変位応答スペクトルを示す。これらの図から,絶対応答である加速度応答スペクトル(図の左)が短周期で最大値(最大加速度約820gal)に漸近し,相対応答である速度応答スペクトル(図の中央)と変位応答スペクトル(図の右)が長周期で最大値(最大速度約90cm/s,最大変位約20cm)に漸近していることが分かる。また,相対変位応答スペクトルに2を掛けた(2階微分した)スペクトルが絶対加速度応答スペクトルにほぼ等しい(全く同じではない)ことも大きな特徴である。

このことは,以下のように考えることができる。(2-1.3)式を変形すると,

$$(\ddot{x}(t) + \ddot{z}(t)) = -\frac{c}{m} \cdot \dot{x}(t) - \frac{k}{m} \cdot x(t)$$
(19)

を得る。ここで,k/m は振動系の固有周波数の 2 乗であるが ((2)式),応答スペクトルで対象としている周波数 ()と等価である。したがって,上式はさらに変形でき,

$$(\ddot{x}(t) + \ddot{z}(t)) = -\frac{c}{m} \cdot \dot{x}(t) - \omega^2 \cdot x(t)$$
(20)

を得る。左辺はマスの絶対加速度であり,右辺第2項は相対変位の2階微分である。右辺第1項は相対速度であるが,周期関数を考えると,変位や加速度が最大値となる時の速度値はほぼゼロである。したがって,

$$(\ddot{x}(t) + \ddot{z}(t)) \cong -\omega^2 \cdot x(t) \tag{21}$$

が近似的に成立する。(21)式から,絶対加速度応答と相対変位応答の2階微分が近似的に等しいことが理解される。

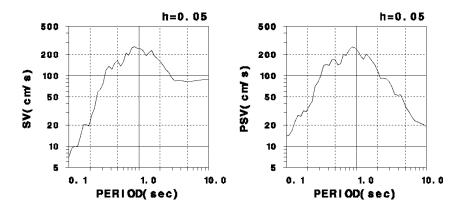


図-6 神戸海洋気象台波 NS 成分の相対速度(SV)・疑似速度応答(PSV)スペクトル

以上の検討から、相対変位応答スペクトルに を掛けた(微分した)スペクトルと絶対加速度応答スペクトルを で割った(積分した)スペクトルもほぼ等しくなることが示唆される。しかし、これらは相対速度応答スペクトルと異なったものである(図 - 6)。このとき、相対変位応答スペクトルあるいは絶対加速度応答スペクトルから の掛け算、割り算で求めた方のスペクトルを疑似速度応答スペクトルと呼び、加速度・速度・変位応答スペクトルをほぼ同じ観点で評価するために良く用いられる。図 - 7 は疑似速度応答スペクトルに加速度・変位の軸を書き加えたもので、3 重応答スペクトルと呼ばれる。このとき、加速度軸で見た応答は絶対加速度応答スペクトルに,変位軸で見た応答は相対変位応答スペクトルに対応している。

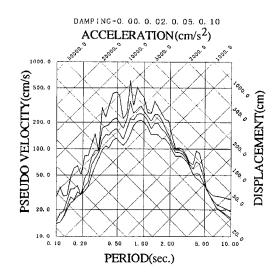


図 - 7 神戸海洋気象台波 NS 成分の3 重応答スペクトル

6.地震計の原理

次に、強震記録を理解するための一助として、地震計の原理について概説する。地震計は地震時に地面とは異なった運動をする必要があり、地面と一体となって同じ運動をしたのでは地震計とはなり得ない。その意味で、天井から吊り下げられた電灯等は地震計となり得る可能性がある。しかし、吊り下げ電灯のように減衰が小さく、いつまでもその固有周期で振動すれば、その自由振動に妨げられて地面の動きそのものを捉えることは困難である。そこで、一般的な地震計には図 8に示すように適当な減衰装置(ダンパー)が取付けられ、系の自由振動を抑制している。

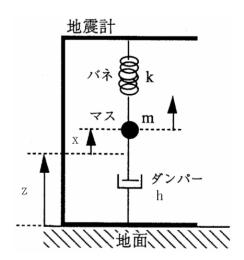


図 - 8 機械式地震計の基本構成(上下動の例)

地震計として、図 8に示すようなバネ、マス、ダンパーより構成されるシステムを考える。これもひとつの1自由度系であり、前述のようにその応答を求めることができる。特に、地震計の特性を示す周波数応答は(17)、(18)式のようになる。これを図示したものが図・9である。上が振幅応答を、下が位相応答を示している。図の横軸は、システムの固有周波数に対する対象周波数()の比として表示している。振幅応答から読み取れることは、システムの固有周期よりも低周波数の地動に対する応答は小さく、高周波数の地動に対しては1対1に応答することである。また減衰が小さい場合、固有周波数付近の地動によって大きな応答(共振)を示すことが分かる。

このことは、図・4に示すような簡単な実験で理解できる。振動系の固有周期よりも長周期の地動ではおもりは地面と一体にゆっくり動いてしまい、地面とおもりの相対変位は小さくなる。逆に固有周期よりも短周期ではおもりは慣性的に静止し、短周期で振動する地動の変位がそのままおもりと地面の相対変位となって計測される。また、振動計の固有周期に近い地動に対しては、共振によっておもりが大きく揺れてしまう。減衰装置によってこれを制御することにより、固有周期付近でも安定した性能を保つことができる。

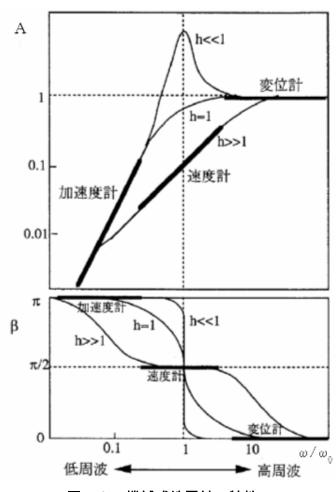


図 - 9 機械式地震計の特性

図-9をもう少し詳しく検討する。減衰 hが1よりもやや小さい場合,システムの固有周波数よりも高周波数では,地動とマスの振幅は同じであり位相遅れも無い。つまり,マスの相対変位は地動変位そのものを表している。この時,地震計は変位計として機能する。これが最も一般的な地震計の利用形態である。減衰は h=0.7程度が用いられる。次にシステムの固有周波数よりも高周波数側の応答を考える。この範囲でのシステムの応答は,周波数の2乗に比例して大きくなっており(両対数軸では傾き2の直線となる),位相が逆転している。これは,地動を2階微分した応答,つまり加速度を示している。ただし,低周波数になるほどマスの変位を信号として検出することが困難となる。減衰 hを非常に大きくした場合,固有周波数周りの応答振幅は周波数に比例して大きくなり(両対数軸で傾き1),位相が90度ずれている。これは,マスの変位が地動を1階微分した速度で応答していることを示している。このように,減衰を調整し,固有周波数に対してどの周波数帯を計測するかによって,同じ振動計であっても異なった特性の地震計として利用できる。

おもり(マス)の動きを検出する方法として、地震観測の初期にはマスに直接ペンを付けるなどの方法が用いられた。しかし現在では、おもりの動きを電気信号として取り出すため、図・10に示すように、コイルを巻いたおもりを永久磁石の磁場の中で運動させる電磁式地震計が主流となっている。磁場の中でコイルが運動すると、その速度に比例した電流が発生する(電磁誘導)ことが知られている。したがって、機械的に変位計として用いられている地震計は、電磁式としては速度計(1階微分)として機能することになる。

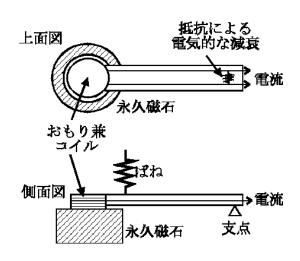


図 - 10 電磁式地震計

電磁式地震計の出力端を解放した状態(抵抗無限大)では,バネ・マス系は機械式地震計と全く同じ運動をおこなう。一方,出力端をショートした状態(抵抗ゼロ)では,発生した電流がコイルに流れ込んでコイルを止める力として作用するため(自己誘導),電気的な制動により大きな減衰力が生じる。したがって,適当な大きさの電気抵抗を出力端に与えるこ

とによって,電気的な減衰を導入することができる。マスの動きによって生じた電流を電気的に記録できること,および減衰を電気的な抵抗をとして与えることができることが,電磁式地震計の特徴である。

7.参考文献

(以下,本文では特に引用していないが,考え方の基本となっている。)

大崎順彦:地震動のスペクトル解析入門, 鹿島出版会, 1982.

山中浩明編著 武村雅之・岩田知孝・香川敬生・佐藤俊明著:地震の揺れを科学する 東京大学出版会,2006.

付録A 時間・周波数領域の応答と応答スペクトル,地震計の特性(response.xls)

1)内容

"Time Domain", "Frq. Domain"各シートは,それぞれ時間領域と周波数領域で解く例題である。"Response Spectra"シートは,与えられた波形に対する応答スペクトルを計算し, "Seismo"シートは,地震計の特性曲線を示すものである。それぞれ,本文の説明をいろいるな条件で試せるようにしたものである。

2) "Time Domain"シート

他のシートから"Time Domain"シートに移動した場合,図-1のようなメッセージが表示されるが,その際に「OK」をクリックすれば図-2の状態になる。

このシートの入力値は,赤字で示されている,データ数,サンプリング時間間隔,系の減衰定数と固有周期である。また,入力波形はインパルスとしているが,本文図 - 1 に示した例のほか,任意の波形を入力として試すことができる。マクロによる計算は,以下のふたつのボタンによって実行される。

[クリア]:計算結果とそれを図示した内容をクリアする。

[計算]:入力波形と,設定値に基づいて計算された応答波形を,それぞれ表示する。

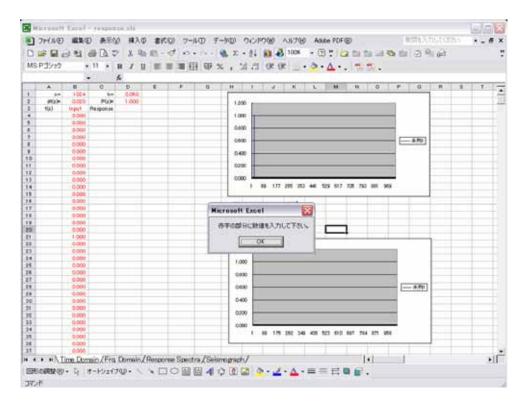


図 - 1 他シートから "Time Domain" シートに移動した最初の状態

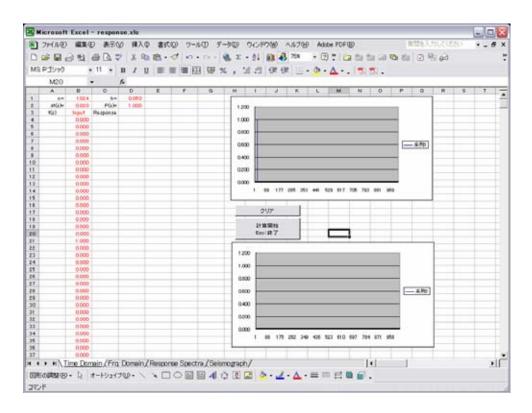


図 - 2 "Time Domain"シートが表示された状態

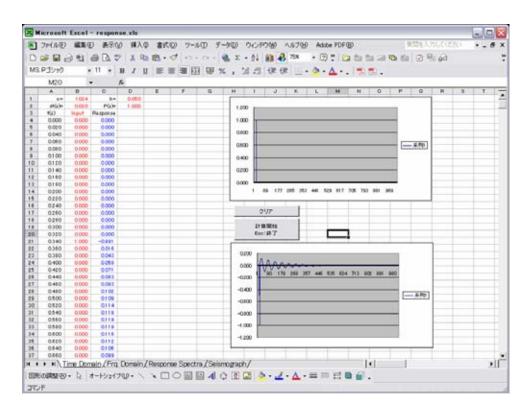


図 - 3 "Time Domain"シートの計算結果例

マクロによる計算結果例を図 - 3 に示す。添付した VBA プログラムでは波形データ数の最大を 4096 個に制限しているので,注意が必要である。

3) "Frq. Domain"シート

他のシートから"Frq. Domain"シートに移動した場合,赤字の部分に入力を促すメッセージが表示されるが,その際に「OK」をクリックすれば図-4の状態になる。

このシートの入力値は,赤字で示されている,データ数,サンプリング時間間隔,系の減衰定数と固有周期である。また,入力波形はインパルスとしているが,本文図 - 1 に示した例のほか,任意の波形を入力として試すことができる。マクロによる計算は,以下のふたつのボタンによって実行される。

「クリア]:計算結果とそれを図示した内容をクリアする。

「計算]: 入力波形と,設定値に基づいて計算された応答波形を,それぞれ表示する。

マクロによる計算結果例を図 - 5 に示す。"Time Domain"シートとは異なる計算方法ではあるが、周波数領域の計算法の限界をわきまえて利用する限り、ほぼ同じ解が得られる。また、添付した VBA プログラムでは波形データ数の最大を 4096 個に制限しているので、注意が必要である。

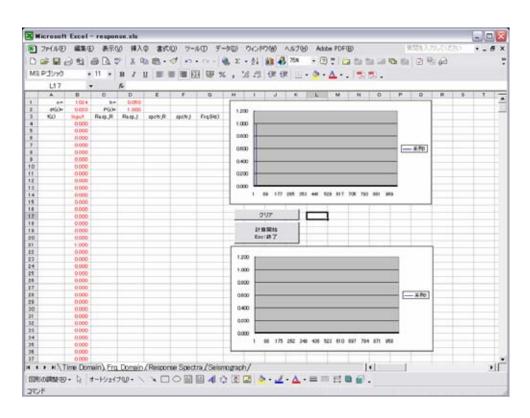


図 - 4 "Frq. Domain"シートが表示された状態

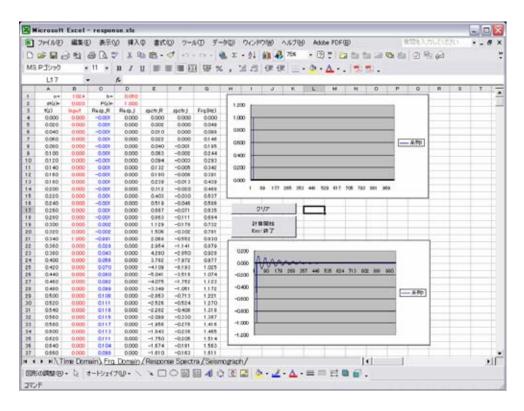


図 - 5 "Frq. Domain"シートの計算結果例

4) "Response Spectra"シート

他のシートから"Response Spectra"シートに移動した場合,赤字の部分に入力を促すメッセージが表示されるが,その際に「OK」をクリックすれば図-6の状態になる。

このシートの入力値は,波形データとそのデータ数,サンプリング時間間隔,および応答スペクトルを計算する最小・最大の周期,その間の分割数(対数軸で分割),加えて系の減衰定数である。

[クリア]:計算結果とそれを図示した内容をクリアする。

[計算]:入力値に基づいて応答スペクトル(絶対加速度応答:SA,相対速度応答:SV,相 対変位応答:SD,疑似速度応答1(絶対加速度応答から):PSV1,疑似速度応答 1(相対変位応答から):PSV2)を計算し,グラフに表示する。

マクロによる計算結果例を図 - 7 に示す。なお,対数軸の分割数は任意だが,グラフのポイント数を 100 点として指定しているため,分割数によってはグラフがうまく表示されない場合がある。また,VBA プログラムでは波形データ数の最大を 4096 個に制限しているので,注意が必要である。

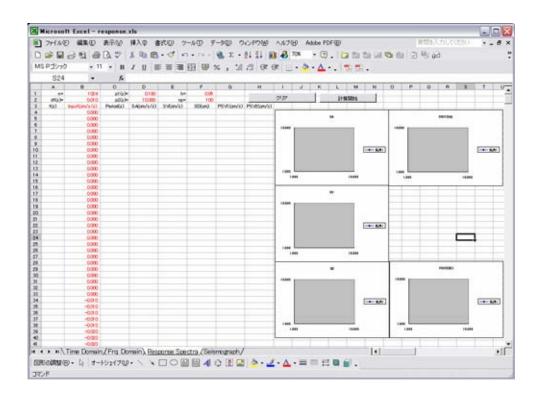


図 - 6 "Response Spectra"シートが表示された状態

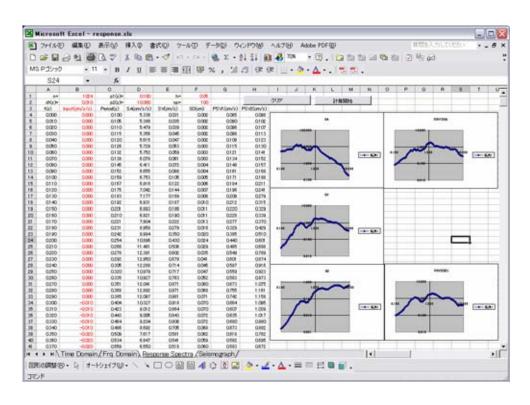


図 - 7 "Response Spectra"シートの計算結果例

5) "Seismograph"シート

他のシートから "Seismograph"シートに移動した場合,赤字の部分に入力を促すメッセージが表示されるが,その際に「OK」をクリックすれば図-8の状態になる。

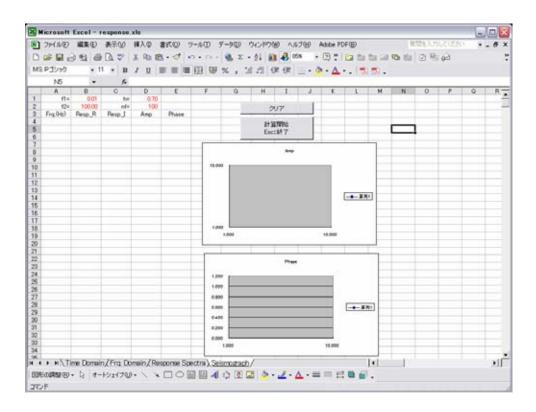


図 - 8 "Seismograph"シートが表示された状態

このシートの入力値は,地震計の応答特性を計算する最小・最大の周波数比(系の固有周波数に対する),その間の分割数(対数軸で分割),加えて地震計の減衰定数である。

[クリア]:計算結果とそれを図示した内容をクリアする。

[計算]:入力値に基づいて,地震計の応答特性(振幅特性:Amp.,位相特性:Phase)を計算し,グラフに表示する。

マクロによる計算結果例を図 - 9に示す。なお , 周波数軸は , 対象とする地震計の固有周期に対する入力地動の固有周期の比を示している。また , 対数軸の分割数は任意だが , グラフのポイント数を 100 点として指定しているため , 分割数によってはグラフがうまく表示されない場合がある。基本的には , 減衰定数による応答の違いを試すことを主眼としたものと了解されたい。

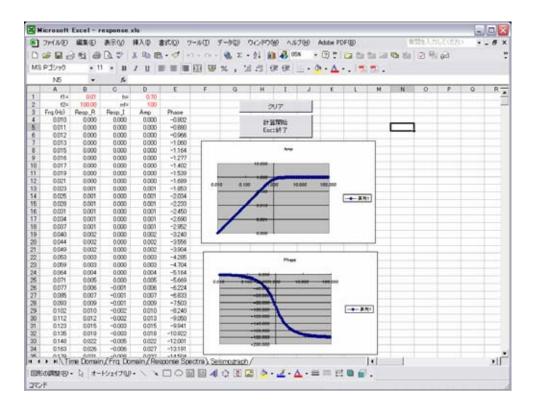


図 - 9 "Seismograph"シートの計算結果例

Haskell Matrix (水平成層地盤による SH 波の応答)

1.入力とシステム応答と出力

第2講「周波数領域での解析」で述べたように,地盤をひとつのシステムと考えた場合, 地盤の応答を求めるということはデルタ関数をシステムに入力した場合の出力(インパルス・レスポンス)を計算することと同じである。これを周波数領域で考えれば,

- 1)入射波をフーリエ変換し,周波数毎の振幅と(初期)位相を得る。
- 2)周波数毎のシステムの応答(振幅変化と位相のずれ)を計算する。
- 3)1)と2)を掛けて,周波数毎の出力を得る。
- 4)3)をフーリエ逆変換して出力波を得る。

というプロセスを踏むことになる。ここでは、水平成層地盤を仮定して、その地盤の応答を 得るための方法について解説する。

2 . SH 波問題と P-SV 波問題

以下では、地震波の計算の中で最も単純な平面 SH 波問題を取り扱う。地震波は、実体波(P波,S波)と表面波(Love波,Rayleigh波)で構成される(図-1)。このうち、表面波は地表面などの層境界があって存在するものである。表面波の伝播特性については別途取り上げて検討する。

P波は波の進行方向に振動する粗密波(体積変化を伴う)であり,S波は進行方向に垂直に振動するせん断波(体積変化を伴わない)である。S波は進行方向に直交する面内を自由に振動する。しかし,水平な地表面など何か特定の指標を仮定すると,便宜的に水平方向の成分(SH波)と鉛直成分(SV波)に分解することができる(図 - 2)。P波とSV波は,反射や屈折の度にP波とSV波を生成し,お互いに関連する波となる。しかし,SH波は反射屈折を繰り返してもSH波のみである。地震動が構造物に作用する場合,S波水平成分の影響が大きいと考えられ,また取り扱いも簡単であることから,通常の耐震検討ではSH波のみを考慮することが多い。

ただし,このような SH 波や SV 波の定義は対象とする構造やサイトによって決まる相対的な定義であり, SH 波や SV 波という特殊な波動が存在するわけではないことに注意する必要がある。特に3次元的に変化する地盤構造を伝播する場合,これらの波が複雑に干渉して波動場を構築することになる。

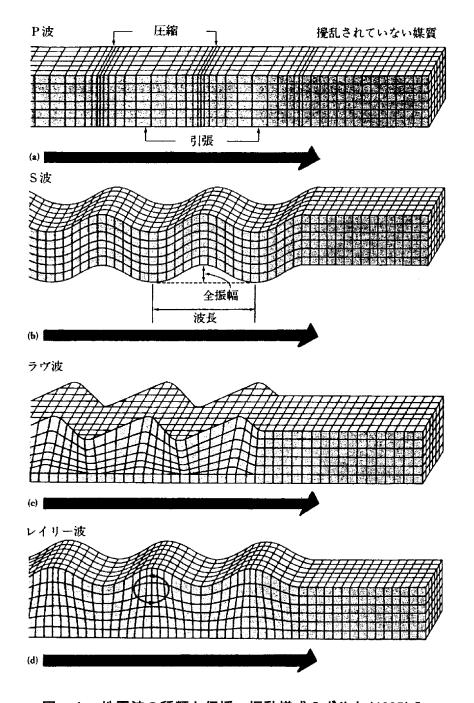


図 - 1 地震波の種類と伝播・振動様式[ポルト(1985)]

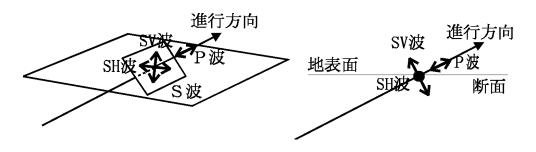


図 - 2 SH 波と SV 波

3.変位・速度・加速度とひずみ

地震動を時間変動として捉える場合,複素指数関数 $\exp(i t)$ を用いて表すと便利である。ここで, =2 f であり,角周波数と呼ぶ。一方,地震動を空間変動として捉るた場合は,複素指数関数 $\exp(ikx)$ で表現する。このとき,k は波数であり,x は空間的な距離を表している。地震動を含む自然界の変動(振動)は,波数で表現される空間変動の側面と,周波数で表現される時間変動の側面を両方持っている。したがって,変動(振動)の一般的な表現は, $\exp(i t+ikx)$ のようになる。ここで,波数 k と角周波数 には,波動の進行速度 c を介して, $k=\sqrt{c}$ で表される重要な関係がある。つまり,周波数が小さい(長周期)ほど波数が小さく(波長が長い),周波数が大きい(短周期)ほど波数が大きい(波長が短い)ことになる。このように,周波数と波数はお互いに関連しており,独立には定まらない。

いま,地面の変位が $A \cdot \exp(i + ikx)$ で表現される変動をおこなっているときの,速度,加速度について検討する。速度は変位の時間変化,加速度は速度の時間変化であるから,それぞれ微分関係にある。また,加速度がある時間間隔で作用することによって速度が変化し,速度に時間を乗じることで変位量が求まり,これらは積分関係にある。指数関数の微分は簡単におこなうことができ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[A \cdot \exp(i\omega \ t + ikx) \right] = i\omega \ A \cdot \exp(i\omega \ t + ikx) \tag{1}$$

$$\frac{\partial^{2}}{\partial^{2}t} \left[A \cdot \exp(i\omega \ t + ikx) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[i\omega \ A \cdot \exp(i\omega \ t + ikx) \right] = -\omega^{2} A \cdot \exp(i\omega \ t + ikx)$$
 (2)

である。 1 階微分した速度の振幅には が乗じられ, 2 階微分した加速度の振幅には 2 が乗じられている。つまり,(角)周波数が大きい(短周期)ほど,変位に比べて加速度,速度が大きくなることがわかる。積分は,逆に加速度から速度,変位と,順に で除されることになる。このような関係をフーリエ振幅スペクトルで示したものが図 - 3 である。一般にフーリエ・スペクトルは横軸を周波数とした両対数軸で描かれるので,速度で一定振幅のスペクトルは,i で除した変位では低周波数(長周期)ほど振幅の大きい傾き - 1 の直線で,i を乗じた加速度では高周波数(短周期)ほど振幅の大きい傾き 1 の直線と等価になる。これは,10 倍,1/10 倍の操作が,対数軸上ではそれぞれ + 1 , - 1 に相当することから理解されよう。

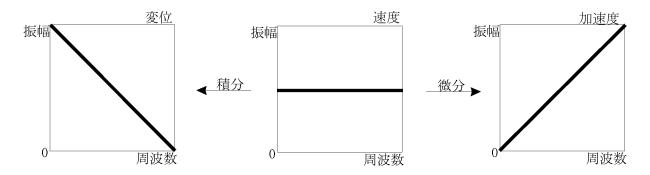


図 - 3 変位・速度・加速度のフーリエ振幅スペクトル(両対数表示)

位相については,加速度は変位の逆振幅になっており,周期関数で考えれば位相が逆転している(あるいは 180 度ずれている)ことになる。速度には虚数単位 i が乗じられており,これは図 - 2 に示した複素平面実軸が虚軸に,虚軸が実軸の負の方向になることと等価であり,位相が /2 あるいは 90 度回転していることに相当する。

波数kで表される空間変化についても同様に空間微分を実行することができ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[A \cdot \exp(i\omega \ t + ikx) \right] = ikA \cdot \exp(i\omega \ t + ikx) \tag{3}$$

となる。このような変位の空間変化を,特にひずみと呼ぶ。式からも明らかなように,変位が同じならば,波数が大きい(波長が短い)ほどひずみが大きくなることがわかる。

4.波動方程式

単位体積の媒質が空間変化を受けてひずむとき,その媒質にはひずみに比例した応力が発生する。これは,バネを伸縮したときに力が生じることと同じである。また,応力の空間変化(媒質に作用する力の不均衡)が媒質に作用する力となる。これを式で表すと,単位体積の媒質に作用する力Fは,

$$F = \frac{\partial}{\partial x} [\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x} \{A \cdot \exp(i\omega t + ikx)\}]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} [\alpha \cdot \{ikA \cdot \exp(i\omega t + ikx)\}] = -\alpha k^2 A \cdot \exp(i\omega t + ikx)$$
(4)

となる。ここでは,ひずみ・応力の比例係数(媒質の硬さに関する係数)を α としている。 媒質に作用する力は,その媒質に生じる加速度に媒質の質量を掛けたものと等価である。ここで,時間微分で得た加速度の表現を用い,単位体積あたりの媒質の質量(密度)をとすると,

$$\rho \frac{\partial^{2}}{\partial^{2} t} \exp(i\omega t + ikx) = \alpha \frac{\partial^{2}}{\partial^{2} x} \exp(i\omega t + ikx)$$
 (5)

のように,変位の時間微分と空間微分がひとつの式で関係付けられる。ここで,変位を Uと し, $c^2 = -/$ を仮定し,先に示した k = -/c の関係を適用すると,上式は,

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 t} U = c^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 x} U \tag{6}$$

と変形される。 は媒質のバネ定数に相当するものであり, S 波の場合は剛性率 μ (= 密度 \times S 波速度 2) がそれにあたる。

この,時間変動と空間変動を関係付ける式を波動方程式と言う。地震波や音波など,多くの波動伝播現象がこの方程式に従っている。ここでは,簡単化のために波動の進行をx方向だけに留めたが,実際の波動は3次元的に伝播し,波動方程式も3次元的な表現となる。また,先に示した複素指数関数による波動場の表現が波動方程式を満足することも,以上から容易に理解される。周波数あるいは波数で分解した個々の複素指数関数が波動方程式を満たすことは,それを足し合わせた任意の波形も波動方程式を満足することを保証している。このように,波動方程式の解が周期関数の和で表現できることが,その取り扱いを容易なものにしている。

ただし、上に示した波動方程式は、単に波の伝播を表現しているに過ぎない。 地震学の分野では、これに種々の(境界)条件を組み合わせることにより、その条件を満たす波動場を計算することが広くおこなわれる。

5.2層構造地盤の応答

図 - 4に示すような水平な堆積層の応答特性を計算する方法について,先ずその概念を示す。ここで,z軸は各層それぞれの上面から取るものとする。

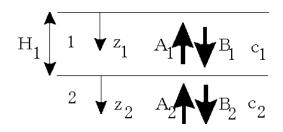


図 - 4 水平 2 層構造の SH 波動場

基盤(速度 c_2)と堆積層(速度 c_1)の境界に下から入射した波の振幅を A_2 ,位相が 0 と仮定する。堆積層の中には,上向きに進む波(振幅 A_1)と下向きに進む波(振幅 B_1)が混在している。ある角周波数を想定し,波動方程式を満たすように堆積層の中の変位を記述すると,

$$U_1(z_1, t) = A_1 \cdot \exp(ik_1 z_1 + i\omega \ t) + B_1 \cdot \exp(-ik_1 z_1 + i\omega \ t)$$
 (7)

のようになる。ここで, $k_{\vec{r}}$ / c_1 は堆積層を上下に伝播する地震波の波数である。時間と空間のトータルの位相を固定して考えると,上向きに進む波(A_1)は時間が経過する(t が大きい)ほど z_1 が小さく(浅く)なり,時間とともに浅い方に伝播することが分かる。それに対して下向きに進む波(B_1)は時間が経過する(t が大きい)ほど z_1 が大きく(深く)なっており,下向きの伝播を表現している。媒質の硬さを表す係数(剛性率 = 密度 × S 波速度 2)を μ_1 とすると,堆積層の中の応力(変位の空間微分であるひずみに剛性率を乗じたもの)は,

$$\tau_{1}(z_{1},t) = ik_{1}\mu_{1}A_{1} \cdot \exp(ik_{1}z_{1} + i\omega t) - ik_{1}\mu_{1}B_{1} \cdot \exp(-ik_{1}z_{1} + i\omega t)$$
 (8)

と書ける。同様に基盤層内の変位と応力は、

$$U_{2}(z_{2},t) = A_{2} \cdot \exp(ik_{2}z_{2} + i\omega t) + B_{2} \cdot \exp(-ik_{2}z_{2} + i\omega t)$$
(9)

$$\tau_{2}(z_{1},t) = ik_{2}\mu_{2}A_{2} \cdot \exp(ik_{2}z_{2} + i\omega t) - ik_{2}\mu_{2}B_{2} \cdot \exp(-ik_{2}z_{2} + i\omega t)$$
 (10)

と表すことができる。地表面(堆積層で $Z_{f}=0$)は自由表面なので ,応力は 0 になる($_{1}(0,t)=0$)。 これは , 地表面で上昇波と下降波の振幅が等しい ($A_{f}=B_{f}$) とすることと等価である。また , 基盤と堆積層の境界 (堆積層で $Z_{f}=H_{f}$, 基盤で $Z_{f}=0$) では , 堆積層側と基盤側の変位と応力が 連続になる ($U_{1}(H_{1},t)=U_{2}(0,t)$, $U_{1}(H_{1},t)=U_{2}(0,t)$) 。

これらの条件に,入射波の振幅が $1(A_{\geq 1})$ との仮定を加えると,

$$A_1 \cdot \exp(ik_1 H_1) + A_1 \cdot \exp(-ik_1 H_1) = 1 + B_2 \tag{11}$$

$$k_1 \mu_1 A_1 \cdot \exp(ik_1 H_1) - k_1 \mu_1 A_1 \cdot \exp(-ik_1 H_1) = k_2 \mu_2 - k_2 \mu_2 B_2 \tag{12}$$

の連立方程式を導くことができる。ここでは , すべての項に共通して現れる , $\exp(i t)$ を省略している。(11) , (12)式から B_2 を消去すると ,

$$U_1(0) = 2A_1 = 2k_2\mu_2/[k_2\mu_2 \cdot \cos(k_1H_1) + i k_1\mu_1 \cdot \sin(k_1H_1)]$$
(13)

が得られる。ただし,式の展開をおこなう途中で, $\exp(ix)+\exp(-ix)=2\cdot\cos(x)$,

 $\exp(ix) - \exp(-ix) = 2i \cdot \sin(x)$ の関係を用いている。

これが,角周波数 に相当する (k_1 , k_2 は で決まる),堆積層の周波数応答である。この一連の計算をいろいろな周波数で実施する事により,任意の波形に対する応答波形を計算することができる。

6.減衰の導入

以上の地震応答計算では、地盤の内部減衰や散乱減衰を考慮していない。これでは、計算 した地盤応答が実際に比べて非現実的に大きくなってしまう。実用的な計算にあたっては、 地盤の減衰を考慮する必要がある。その際、一般に用いられるのは複素剛性という概念であ る。

SH 波問題の場合,地盤の剛性とは μ (= ℓ) であり,実数の定数として取り扱った。複素剛性とは,

$$\mu^* = \mu \ (1 + 2ih) \tag{14}$$

の様に,剛性率を複素数 μ *で表すことを意味する。ここで, h は減衰係数である。このとき,

$$c^* = \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} (1 + 2ih)^{\frac{1}{2}} \cong c(1 + ih)$$
 (15)

と近似することができる(h は微少量なので 2 次以上を無視している)。このとき,波数も複素数となり,

$$k^* = \frac{\omega}{c^*} = \frac{\omega}{c} (1 + ih)^{-1} \cong k(1 - ih)$$
 (16)

との近似も可能である。このとき,空間的な波動の伝播は,

$$\exp(-ik^*x) = \exp(-ik(1-ih)x) = \exp(-ikx) \cdot \exp(-hkx)$$
(17)

と表記される。 $\exp(-hkx)$ は実数の指数関数であり、距離 x とともに波動が指数関数的に減衰することを示している。そのため、時間が経過するほど(伝播距離が長くなるほど)減衰する応答を得ることができる。

hがほぼ 1/(2Q)であること(Q値は地震波動で用いられる減衰項),また k=2 f/c と与えられることを考慮すると,この減衰項は,

$$\exp(\frac{-\pi fx}{Q \cdot c}) \tag{18}$$

となり、Q値の定義に一致する。

このように ,周波数領域の計算における剛性率を複素数で表すだけで ,近似的ではあるが , 簡便に減衰を導入することができる。

7. 多層構造地盤の応答

次に,図-5に示すような,水平多層の堆積層の応答を計算する方法について述べる。ここで解説する方法は,一般に Haskell Matrix 法と呼ばれる方法である。

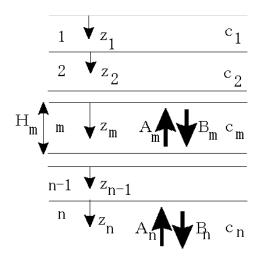


図 - 5 水平多層構造の SH 波動場

さて,図中の第 m層における変位と応力は,2層の場合と同様に考えて,

$$u_m(z_m) = A_m \cdot \exp(ik_m z_m) + B_m \cdot \exp(-ik_m z_m) \tag{19}$$

$$\tau_m(z_m) = ik_m \mu_m A_m \cdot \exp(ik_m z_m) - ik_m \mu_m B_m \cdot \exp(-ik_m z_m)$$
(20)

と表すことができる。ここでは ,すべての項に共通する $\exp(i-t)$ を始めから省略している。 これらをマトリックス表示し , $z_n = H_n$ とすると ,

$$\begin{pmatrix} u_m(H_m) \\ \tau_m(H_m) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(ik_m H_m) & \exp(-ik_m H_m) \\ i\mu_m k_m \exp(ik_m H_m) & -i\mu_m k_m \exp(-ik_m H_m) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix}$$
 (21)

のようになる。また, $Z_n=0$ とすると,

$$\begin{pmatrix} u_m(0) \\ \tau_m(0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_m k_m & -i\mu_m k_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix}$$
 (22)

となる。これら 2 式から A_m B_m を消去し $\exp(ix) + \exp(-ix) = 2 \cos(x)$, $\exp(ix) - \exp(-ix) = 2i \cos(x)$ sin(x)の関係を用いれば ,

を得る。これで,堆積層の上面と下面をつなぐマトリックスを作ることができた。ここで,簡単化のためにマトリックスを[T_m]と表記し,第m層と第m-1層の境界で変位と応力が連続である条件,

を適用すると、

$$\begin{pmatrix} u_m(0) \\ \tau_m(0) \end{pmatrix} = \left[T_{m-1} \right] \begin{pmatrix} u_{m-1}(0) \\ \tau_{m-1}(0) \end{pmatrix}$$
 (25)

と、各層の上面での波動を順次計算することのできる、漸化関係が得られる。ここで、

$$[R_{m-1}] = [T_{m-1}][T_{m-2}] \dots [T_2][T_1]$$
(26)

と置き, m=n(基盤)とすると,上の漸化関係は,

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ \tau_n(0) \end{pmatrix} = \left[R_{n-1} \right] \begin{pmatrix} u_1(0) \\ \tau_{-1}(0) \end{pmatrix}$$
 (27)

のように書くことができる。これで,基盤上面における波動と地表面における波動をつなぐことができた。このように,マトリックスを巧みに用いることにより,堆積層が何層あろうとも,それらをまとめてひとつの層のように取り扱うことができる。

地表面では応力が0なので(((0)=0), 上の式から,

$$u_n(0) = R_{n-1}(1,1) \cdot u_1(0) \tag{28}$$

$$\tau_{n}(0) = R_{n-1}(2,1) \cdot u_{1}(0) \tag{29}$$

が導かれる。ここで, $R_{n-1}(2,1)$ などは,マトリックス $[R_{n-1}]$ の2行1列の要素を示したもので

ある。これらと,第n層における波動場の表現である,

の関係を連立させ,(28),(29),(30)で表される 4 つの方程式から, B_n , $u_n(0)$, $u_n(0)$ を消去すると,

$$u_1(0) = \frac{2A_n}{R_{n-1}(1,1) - i\frac{R_{n-1}(2,1)}{\mu_n k_n}}$$
(31)

を導くことができ,基盤入射波の振幅 A_n に対する地表面の地震応答を計算することができる。 上の結果で特に n=2 とした場合,これは先に 2 層構造で示した結果と全く同じである。

結局,水平多層構造による地表面応答を得るためには,

- 1)各層の物性・層厚でマトリックス[T]を作成する。
- 2)マトリクス「T]を層数分掛け合わせて,全体マトリックス「R]を計算する。
- 3)式を用いて地表面応答を得る。

というプロセスを、周波数毎におこなうことになる。

水平成層構造における SH 波の応答について理解を深めるために,上記計算法に基づくエクセル(Excel は Microsoft 社の登録商標)のテンプレート・ファイル(haskell.xls)を別途添付している(本章最後の付録 A)。なお,本解説に添付するエクセルのテンプレート・ファイルの利用にあたっては,第1講「震源断層近傍域の地震動」の付録 Aを参照されたい。

【コラム】

エクセルのテンプレートでは,複素数を実数部と虚数部に分けて計算する手法を採っている。そのため,計算に用いる複素関数も実数部と虚数部に分けて表現しておく必要がある。

1)掛け算

$$(a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib2) = (\{a_1a_2 - b_1b_2\} + i\{a_1b_2 + a_2b_1\})$$

2)割り算

$$\frac{\left(a_1 + ib_1\right)}{\left(a_2 + ib2\right)} = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2a_2 + b_2b_2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2a_2 + b_2b_2}\right)$$

- 3) 指数関数 オイラーの公式 $\exp(a_1+ib_1) = (\{\exp(a_1)\cdot\cos(b_1)\} + i\{\exp(a_1)\cdot\sin(b_1)\})$
- 4)正弦(sin)関数 加法定理とオイラーの公式 $\sin(a_1+ib_1) = \left(\left\{ \frac{\sin(a_1) \cdot (\exp(b_1) + \exp(-b_1))}{2} \right\} + i \left\{ \frac{\cos(a_1) \cdot (\exp(b_1) \exp(-b_1))}{2} \right\} \right)$
- 5)余弦(cos)関数 加法定理とオイラーの公式 $\cos(a_1+ib_1) = \left\{ \left\{ \frac{\cos(a_1) \cdot \left(\exp(b_1) + \exp(-b_1) \right)}{2} \right\} + i \left\{ -\frac{\sin(a_1) \cdot \left(\exp(b_1) \exp(-b_1) \right)}{2} \right\} \right\}$
- 6) 平方根 複素数の複素指数関数表現とオイラーの公式

$$\sqrt{(a_1 + ib_1)} = \sqrt{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \exp(i\pi\theta)} = \sqrt[4]{a_1^2 + b_1^2} \cdot \exp\left(\frac{i\pi\theta}{2}\right) \\
= \left\{ \left\{ \frac{\sqrt[4]{a_1^2 + b_1^2}}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} + i \left\{ \frac{\sqrt[4]{a_1^2 + b_1^2}}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \right\}, \qquad \tan \theta = \frac{b_1}{a_1}$$

8.参考文献

ブルース A. ボルト著,小林芳正監訳:地下核実験探知,古今書院,1985.

(以下は本文では特に引用していないが,考え方の基本となっている。)

土岐憲三:構造物の耐震解析,新体系土木工学,11,技報堂出版,1981.

土木学会編:地震動・動的物性,動的解析と耐震設計法,第1巻,技報堂出版,1989.

土木学会編:動的解析の方法,動的解析と耐震設計法,第2巻,技報堂出版,1989.

付録A 水平成層地盤による SH 波の応答 (haskell.xls)

1)内容

"Parameters"シートで地盤条件を入力し,"Calculation"シートの入力波形による,地表面応答波形を計算する例題である。なお,上昇波入力に対して地表効果を含んだ出力(E入力,2E出力)となっている。

2) "Parameters"シート

他のシートから"Parameters"シートに移動した場合,図-1のようなメッセージが表示されるが,その際に「OK」をクリックすれば図-2の状態になる。

このシートの入力値は,赤字で示されている,層数および各層の厚さ,S波速度,密度,減衰定数である。添付した VBA プログラムでは層数の最大を10層に制限しているので,注意が必要である。

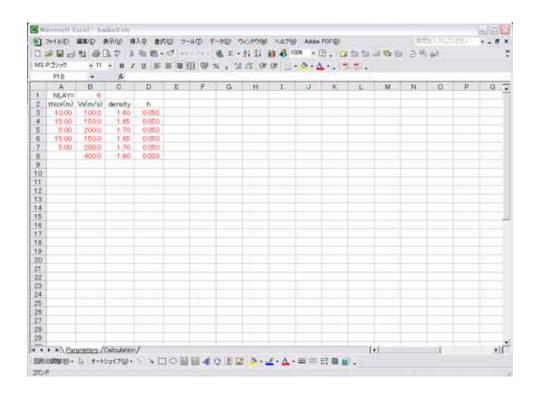


図 - 1 他シートから "Parameters" シートに移動した最初の状態

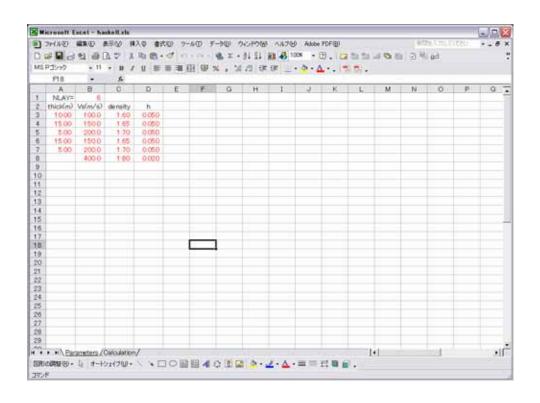


図 - 2 "Parameters"シートが表示された状態

3) "Calculation"シート

他のシートから "Calculation"シートに移動した場合,赤字の部分に入力を促すメッセージが表示されるが,その際に「OK」をクリックすれば図-3の状態になる。

このシートの入力値は、赤字で示されている、データ数、サンプリング時間間隔、入力波形である。サンプルの入力波形は単純なものであるが、任意の波形を入力として試すことができるが、添付した VBA プログラムでは波形データ数の最大を 4096 個に制限しているので、注意が必要である。マクロによる計算は、以下のふたつのボタンによって実行される。

「クリア]:計算結果とそれを図示した内容をクリアする。

[計算]:入力波形と, "Parameters"シートの設定値に基づいて計算された応答波形(青字)を計算し,それぞれ表示する。併せて,周波数応答も出力している。

マクロによる計算結果例を図 - 4に示す。

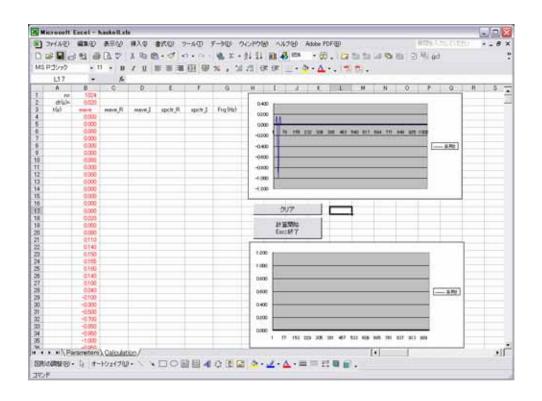


図 - 3 "Calculation"シートが表示された状態

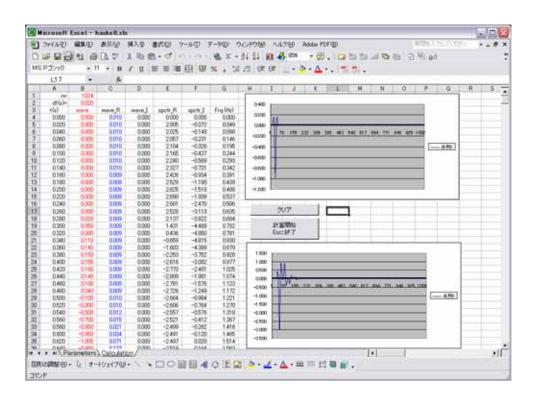


図 - 4 "Calculation"シートの計算結果例

V SHAKE (水平成層地盤による SH 波の等価線形応答)

1. SHAKE の基本的な考え方

地盤は砂や粘土などの土粒子で構成されており、一般に表層部は未固結である。小さな地震動でひずみの小さい場合にはこの様な粒子の結合が保たれているが、地震動が大きくひずみが増大すると粒子結合が壊れ始める。粒子の結合が壊れると、地盤は弱く柔らかくなり(地震波速度が小さくなる)、地震波が伝達し難くなる(減衰が大きくなる)。この様に、地震動の大きさ(地盤ひずみの大きさ)によって物性が変わり、その結果応答が変化する現象を、地盤の非線形応答と呼ぶ。図ー1は、地盤の非線形特性の一例を示している。図には、地盤ひずみ(パーセント表示)に対する剛性の低下(初期剛性 G_0 に対する比)と減衰定数の増加を表現するモデルが記載されている。ここで言う剛性 G_0 は、剛性率(=密度×S波速度²) μ と同じものを示している。

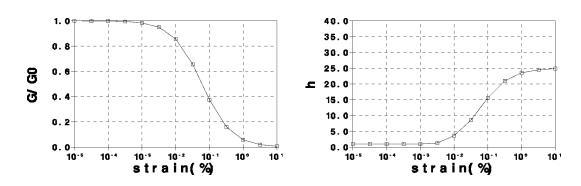


図-1 地盤の非線形応答特性例

大地震動による地盤の応答を合理的に評価する場合には、地盤の非線形挙動を考慮することが必要となる。地盤の非線形挙動を表現する簡便法として、プログラム SHAKE に代表される等価線形化手法を用いられることが多い。以下には、その計算プロセスについて解説する。等価線形化手法は、地盤の非線形応答を線形計算手法(Haskell Matrix 法)で表現することが特徴であり、ひずみレベルの小さい領域(一般には1%以下)で用いられる手法である。図-2にその概念を示し、以下にその計算手順を示す。

- (1) 設定した地盤の剛性,減衰で線形地盤応答計算をおこなう。
- (2) 各層の中間でひずみ波形を計算し、最大歪みに定数(例えば 0.65)を乗じて有効ひずみを計算する。
- (3) 有効ひずみに応じて、地盤のひずみー剛性低下、ひずみー減衰モデルから新しい剛性、減衰を定める。
- (4) 新しく設定した剛性,減衰と,ひとつ前のステップの剛性,減衰の差が,許容範囲以内であれば計算を終了する。許容範囲外であれば,(1)からの計算を繰り返す。

この様に、個々のステップの応答計算には、Haskell Matrix に代表される、線形応答計算 法をそのまま用いることができる。このことから、非線形応答を考慮しているにもかかわら ず、等価線形化手法と呼ばれる。以上の様なプロセスで計算をおこなう必要から、地盤ひず みと地盤の剛性、減衰が整合するまでに、複数回の収束計算が必要となる。

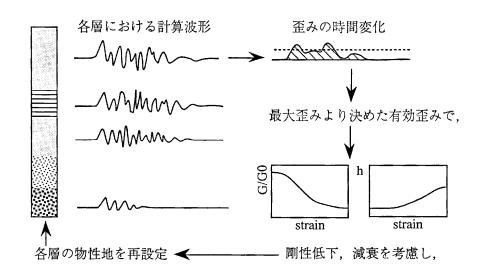


図-2 SHAKE の考え方

プログラム SHAKE に代表される等価線形化手法では、時々刻々と変化する地盤ひずみを一定の有効ひずみで代表させ、全時間、全周波数帯域で一律としている。この様な仮定は、地盤ひずみの小さい領域に限って近似的に成り立つものである点に注意すべきである。また、SHAKE では減衰を周波数によらず一定としているため、高周波(短周期)地震動を過小評価する傾向のあることが指摘されている。より現実的な地盤応答を考えるためには、地盤ひずみの時間変化を追った、液状化解析(逐次非線形解析)を詳細におこなうことが好ましく、SHAKE は簡易的な手法である点に留意する必要がある。

2. 非線形応答特性のモデル化

図-1に示した非線形応答特性は、地盤材料の試験によって決定する量である。しかし、それらの諸特性を何らかの関数で表現しておくことは、離散的に得られている測定値の中間値を設定する際に便利である。ここでは、得られた測定値を満足するように、その特性をモデル化する例として、最も単純な Hardin-Drnevich モデル (H-D モデル)を示す。

H-D モデルでは、基準ひずみ $\gamma_{\rm ref}$ と最大減衰 $h_{\rm max}$ の 2 変数でその特性が規定される。剛性低下と減衰の増加は、

$$G/G_0 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma}{\gamma_{ref}}\right)} \tag{1}$$

$$h = h_{\text{max}} \frac{\begin{pmatrix} \gamma / \\ \gamma_{ref} \end{pmatrix}}{1 + \begin{pmatrix} \gamma / \\ \gamma_{ref} \end{pmatrix}}$$
 (2)

のように表される。(1),(2)式から明らかなように,基準ひずみ $\gamma_{\rm ref}$ は,剛性が初期剛性 G_0 の半分,減衰が最大減衰 $h_{\rm max}$ の半分となるひずみ量を表している。このモデルでは,ひずみの小さい領域では減衰がほぼ 0 となるので,利用にあたっては減衰の下限値を別途設定するなどの工夫をおこなうこともある。

この他にも、よく用いられるものとして Ramberg-Osgood モデル (R-O モデル) 、それを拡張した修正 R-O モデルなどが提案されている。ここでの目的は手法の理解であるので、最も単純な H-D モデルを例題として取り扱うことにする。それ以外のモデルについては、地盤工学方面での知識を深めて頂きたいと思う。

3. 層の中間部でのひずみの導出

等価線形化手法では、各層における最大ひずみを求める必要がある。そこで、Haskell Matrix 法においてひずみ波形を計算する手順を示す。

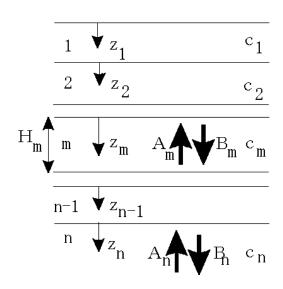


図-3 水平多層構造の SH 波動場

図-3のような水平多層構造を想定した場合、第m層における変位と応力は、

$$u_m(z_m) = A_m \cdot \exp(ik_m z_m) + B_m \cdot \exp(-ik_m z_m) \tag{3}$$

$$\tau_m(z_m) = ik_m \mu_m A_m \cdot \exp(ik_m z_m) - ik_m \mu_m B_m \cdot \exp(-ik_m z_m)$$
(4)

となる。 $k_m = \omega/c_m$ は堆積層を上下に伝播する地震波の波数, μ_m は層の剛性を表している。このとき,第m層の上面($z_m = 0$)と下面($z_m = H_m$)は,

$$\begin{pmatrix} u_m(H_m) \\ \tau_m(H_m) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_m H_m) & \frac{\sin(k_m H_m)}{\mu_m k_m} \\ -\mu_m k_m \sin(k_m H_m) & \cos(k_m H_m) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_m(0) \\ \tau_m(0) \end{pmatrix}$$
 (5)

の関係で結ばれる。(5)式で H_m の代わりに H_m /2を用いると,

$$\begin{pmatrix} u_{m}(\frac{H_{m}}{2}) \\ \tau_{m}(\frac{H_{m}}{2}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_{m} \frac{H_{m}}{2}) & \frac{\sin(k_{m} \frac{H_{m}}{2})}{\mu_{m} k_{m}} \\ -\mu_{m} k_{m} \sin(k_{m} \frac{H_{m}}{2}) & \cos(k_{m} \frac{H_{m}}{2}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{m}(0) \\ \tau_{m}(0) \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} u_m(H_m) \\ \tau_m(H_m) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_m \frac{H_m}{2}) & \frac{\sin(k_m \frac{H_m}{2})}{\mu_m k_m} \\ -\mu_m k_m \sin(k_m \frac{H_m}{2}) & \cos(k_m \frac{H_m}{2}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_m(\frac{H_m}{2}) \\ \tau_m(\frac{H_m}{2}) \end{pmatrix}$$
 (7)

を得ることができる。層厚の半分ずつ2回計算することで、層の最上面の地震動から、層の 中間と最下面の地震動を計算することができる。

(6) 式の応力だけに着目すると,

$$\tau_{m}(\frac{H_{m}}{2}) = -\mu_{m}k_{m}\sin(k_{m}\frac{H_{m}}{2}) \cdot u_{m}(0) + \cos(k_{m}\frac{H_{m}}{2}) \cdot \tau_{m}(0)$$
(8)

のように、層の上面の変位と応力から、層の中間における応力を得ることができる。ひずみ γ は、

$$\gamma_{m}(\frac{H_{m}}{2}) = -k_{m} \sin(k_{m} \frac{H_{m}}{2}) \cdot u_{m}(0) + \frac{\cos(k_{m} \frac{H_{m}}{2}) \cdot \tau_{m}(0)}{\mu_{m}}$$
(9)

と, 応力を剛性で除することにより求めることができる。

Haskell Matrix 法による計算によって、地表 $(z_r=0)$ の変位 $(u_r(0))$ および応力 $(\tau_r(0)=0)$

によって、第1層下面の変位・応力は第2層上面の変位・応力に等しい。第2層上面の変位・ 応力から、(9)式によって第2層中間のひずみを得ることができ、(5)式を用いて第2層下面、 ひいては第3層上面の変位・応力を求めることができる。このプロセスを深い層に向けて繰 り返すことにより、各層中間部でのひずみ波形を得ることができる。

4. 有効ひずみと物性値の変更

以上の考え方に従って、(9)式で得られた周波数毎のひずみからひずみ波形を計算する。図-2に示すように、ひずみ波形の最大値(最大ひずみ)に係数を掛け、有効ひずみを計算する。この係数として、 $0.6\sim0.65$ 程度が用いられる。実際には時間変化するひずみを、この有効ひずみで代表させる。

得られた有効ひずみから、H-D モデルを用いて、そのひずみ下における剛性低下量と減衰を求め、それらから新しい地盤物性を設定する。これは、大きなひずみによって地盤物性が低下した状況を再設定することに相当し、実際にはひずみの時間変化によって物性も変化しているはずのものを簡略化したモデルとなっている。

以上のステップで変化させた物性値がそれまでに想定していた物性値と大きく異なる場合、 新しい物性値で再度地震動応答計算をおこない、各層のひずみ波形から有効ひずみを計算す る。そこで、再び有効ひずみに応じた物性値を設定する。

上記のプロセスを繰り返すことにより、新たな物性値と前回の物性値がほとんど同じ状態に収束するようになる。その物性値が、与えられた入力地震動によって非線形化した地盤の特徴を反映したものと考える。つまり、ひずみの時間変化によって本来時々刻々と変化するはずの物性を、ひとつの物性で代表して計算してしまう方法が SHAKE の考え方である。このとき、計算に用いる地盤応答計算手法はこれまでに拡張してきた線形の Haskell Matrix 法である。非線形地盤応答に等価な線形応答モデルを構築して計算するという意味で、「等価線形化手法」と呼ばれる。あくまで近似的な計算法であるため、ひずみが大きい領域では誤差が大きくなることが指摘されている。そのような場合でも現実的な非線形地盤応答を計算するために、より高度で複雑な手法が提案されているが(液状化解析など)、その詳細はここでは取り上げない。

5. プログラムの骨格

SHAKE の考え方に基づくプログラムを作成するにあたって、以下に示すように、まずその 骨格を設計する。なお、地盤応答は入射波が加速度・速度・変位に依らない量なので、加速 度入力であれば加速度出力が、速度なら速度、変位入力であれば変位出力が得られる。しかし、ひずみを求める式が変位波形と関連しているため、ひずみは一旦変位に直してから評価する必要がある。

[START]

- ①収束のループ始まり
 - ②周波数のループ始まり
 - ○HaskellMatrix 法により地表面地震動(周波数領域)を求める
 - ③地層のループ始まり
 - ○3. に従って各層の中央部におけるひずみ(周波数領域)を求める。
 - ③地層のループ終わり
 - ②周波数のループ終わり
 - ④地層のループ始まり
 - ○ひずみ(周波数領域)をフーリエ逆変換し各層のひずみ波形を計算する。
 - ○ひずみ波形から有効ひずみを求める。
 - ○有効ひずみに応じて物性を変化させる。
 - ○変化前後の物性(剛性率)の差を求める。
 - ④地層のループ終わり

各層の物性変化が許容範囲以内であれば収束のループを抜ける。

- ①収束のループ終わり
- ○地表面地震動(周波数領域)をフーリエ逆変換して地表面波形を計算する。

[END]

SHAKE 波について理解を深めるために、上記の考え方に基づくエクセル (Excel は Microsoft 社の登録商標) のテンプレート・ファイル (shake. xls) を別途添付している (本章最後の付録 A)。なお、本解説に添付するエクセルのテンプレート・ファイルの利用にあたっては、第1講「震源断層近傍域の地震動」の付録 A を参照されたい。

付録A 水平成層地盤による SH 波の等価線形応答 (shake. xls)

1)内容

"Parameters"シートで地盤条件を入力し、"Calculation"シートの入力波形による、地表面応答波形を計算する例題である。なお、上昇波入力に対して地表効果を含んだ出力(E入力、2E出力)となっている。

2) "Parameters" シート

他のシートから"Parameters"シートに移動した場合,赤字の部分に数値入力を求めるメッセージが表示されるが,その際に「OK」をクリックすれば図-1の状態になる。このシートの入力値は,赤字で示されている,層数および各層の厚さ,S波速度,密度,基準ひずみ,最大減衰定数である。添付した VBA プログラムでは層数の最大を 10 層に制限している。

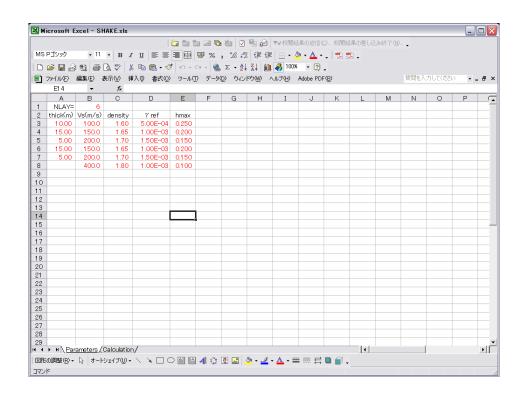


図-1 "Parameters"シートが表示された状態

3) "Calculation" シート

他のシートから "Calculation" シートに移動した場合,赤字の部分に入力を促すメッセージが表示されるが,「OK」をクリックすれば図-2の状態になる。このシートの入力値は,赤字で示されている,データ数,サンプリング時間間隔,入力波形,倍率である。サンプルの入力波形は単純なものであるが,任意の波形を入力として試すことができる。しかし,添

付した VBA プログラムでは波形データ数を最大 4096 個に制限しており,加速度波形の入力を前提としている点に注意されたい。なお,非線形応答の様子を確かめるため,単純な基本波形 (wave0:最大振幅1)の振幅を調整 (セル C1 の数値倍)した波形 (wave)を入力とした計算が実施されるようにしている。任意の波形を入力する際には,wave0 の列を入れ替え,セル C1 を1とすれば良い。マクロによる計算は,以下のふたつのボタンによって実行される。

[クリア]:計算結果とそれを図示した内容をクリアする。

[計算]:入力波形と, "Parameters"シートの設定値に基づいて計算された応答波形(青字)を計算し,周波数応答とともに表示する。併せて,計算途上の各層の有効ひずみ(最大ひずみの 0.65 倍と設定),剛性低下量,エラー量(前ステップと現在の剛性との差の前ステップ剛性との比:10⁻³以下で収束と設定)を,各収束ステップ(最大 100 ステップと設定)で表示するようにしている。

マクロによる計算結果例を図-3 (入力倍率 0.02),図-4 (入力倍率 2),図-5 (入力倍率 20),図-6 (入力倍率 200)に示す。入力倍率が大きくなるほど、応答倍率が小さくなり、地表面応答地震動の周期が長くなることが分かる。また、収束に至るステップ数が増える。入力倍率が 0.02 の場合は最初のステップで収束して線形地盤応答となっているが、減衰の与え方が異なるため第4講の例題 (haskell.xls)とはやや結果が異なる。また、過大な入力では極端にひずみの大きな層ができ、計算が不安定になって終了する場合が生じる。

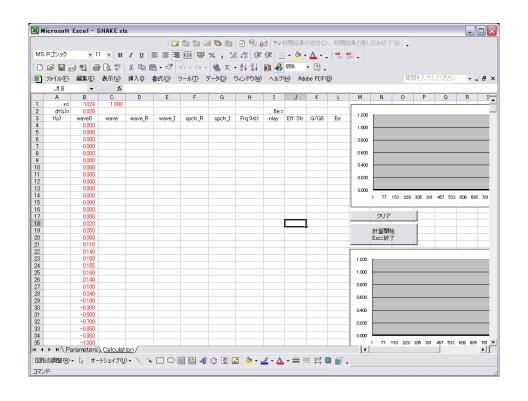


図-2 "Calculation" シートが表示された状態

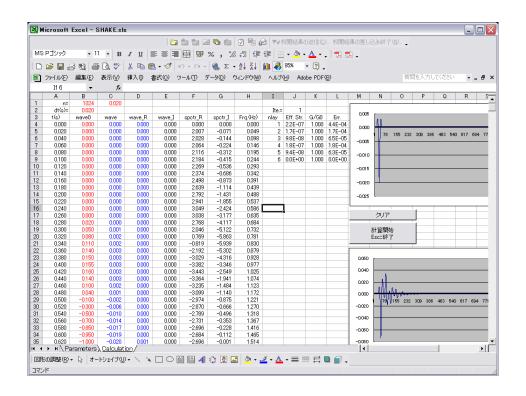


図-3 "Calculation" シートの計算結果例1 (入力倍率 0.02)

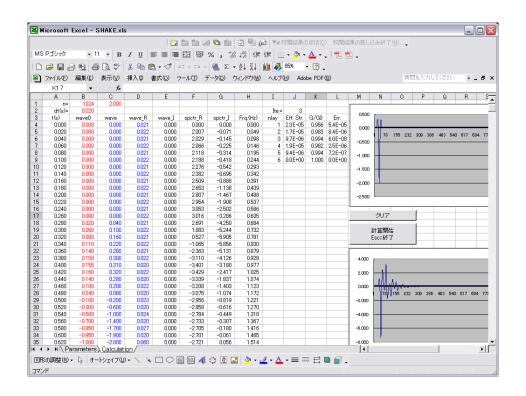


図-4 "Calculation" シートの計算結果例 2 (入力倍率 2)

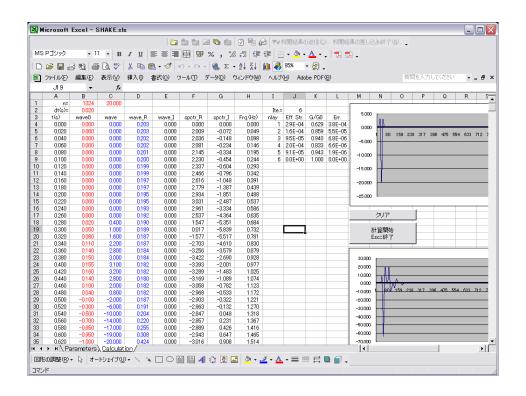


図-5 "Calculation" シートの計算結果例 3 (入力倍率 20)

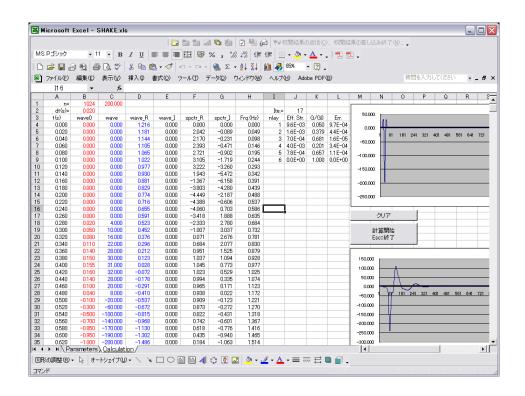


図-6 "Calculation" シートの計算結果例 4 (入力倍率 200)

VI 表面波 (Love 波) の位相速度

1. Love 波と Rayleigh 波

表面波は、自由表面や層境界面に沿って伝播する波動であり、Love 波と Rayleigh 波が知られている。図-1に示すように、Love 波は進行方向に直交する水平方向成分のみを持ち上下動成分が無い。つまり SH 波動場で構成される表面波である。一方、Rayleigh 波は進行方向の水平動成分と上下動成分からなり、P-SV 波動場の表面波である。表面波の振幅は表面でいちばん大きく、地中深くなるほど小さくなる。

いずれの位相速度の導き方もほぼ同様であるが、ここではより扱い易い SH 波動場の Love 波について解説する。

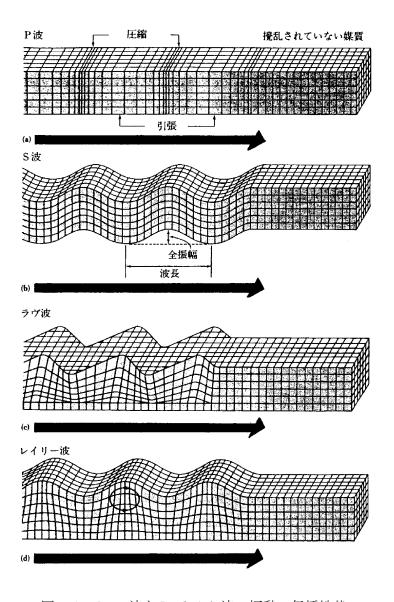


図-1 Love 波と Rayleigh 波の振動・伝播性状

2. 斜めに伝播する波動の表現

図-2に示すような水平成層地盤を伝播する Love 波を考える。これまで Haskell Matrix を仮定した検討では波動の鉛直方向伝播のみを扱っていたが、ここでは斜め方向の波動伝播を考慮している。

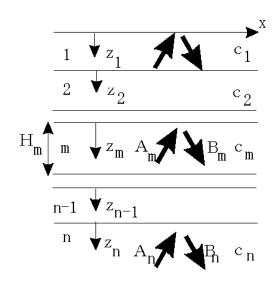


図-2 水平多層構造の SH 波動場 (斜め伝播)

斜め方向に伝播する波動を表現するためには、鉛直入射による第 m層における変位、

$$u_m(z_m) = A_m \cdot \exp(is_m z_m) + B_m \cdot \exp(-is_m z_m) \tag{1}$$

に水平方向(x方向)の伝播成分を加えて以下のように表現する。

$$u_m(z_m) = A_m \cdot \exp(is_m z_m - iqx) + B_m \cdot \exp(-ik_m z_m - iqx)$$
 (2)

これで、波動は鉛直伝播ではなくx方向に伝播する成分を持った斜め伝播となる。ここで、鉛直波数 s_m と水平波数 q の関係について触れる。層内を伝播する波の波数 (k_m) は、対象とする角周波数 ω (= $2\pi f$: f は周波数)と媒質の地震波伝播速度 c_m を用いて、

$$k_m = \omega/c_m \tag{3}$$

と表すことができる。このとき、 k_m を水平方向および鉛直方向に分解したものが、 s_m 、qであり、次式および図-3に示す関係となっている。

$$S_m = \sqrt{k_m^2 - q^2} \tag{4}$$

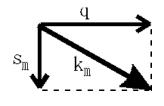


図-3 波数の関係

ここで、水平方向波数 q に層の添字を附していないのは、これが層によらない値だからである。 図-4 に示すように、波動が斜め入射した場合の屈折方向は、水平方向の波長(波数)が保存されるようにおこなわれる。 さもないと、波動が不連続になってしまう。

図中、上層の波長は V_I/f 、下層は V_2/f なので、その水平成分が保存されるということは、

$$\frac{V_1/f}{\sin(a)} = \frac{V_2/f}{\sin(b)} \tag{5}$$

の関係にある。これを変形すると,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sin(a)}{\sin(b)} \tag{6}$$

となり、波動の屈折を表現する Snell の法則が導かれる。つまり、Snell の法則とは、「水平波数保存の法則」である。水平波数が保存されることにより、全ての層で水平方向の波動伝播速度が同じとなる。つまり、表面波の位相速度(周波数毎の伝播速度)を求めることは、周波数毎の q を求めることに相当する。

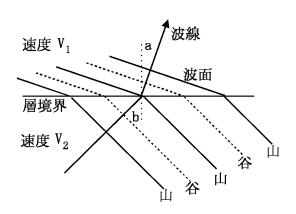


図-4 斜め入射による波線(波面)の屈折

3. 表面波伝播速度の特徴

P波・S波など実体波の伝播速度は、周期(周波数)によらず一定である。しかし、表面波の 伝播速度は周期によって変化し、一般に長周期になるほど速くなる。 図-5の左に示すように、ある地盤を表面波が伝播する場合、周期が長くなるほど波長が長くなり、その伝播が影響する(あるいは影響される)地盤の深度が大きくなる。一般的な地盤では深部ほど地震波伝播速度が速いため、周期が長く波長の長い表面波ほど平均的な伝播速度が速くなる。このように、周期(周波数)によって伝播速度が異なることを分散と言い、長周期ほど速い場合を正分散と呼ぶ。このように周期毎の伝播速度が異なるため、表面波が伝播するにつれて周期の長い成分が先に進み、周期の短い成分が遅れ、波群の形状が伝播とともに崩れてゆく傾向にある。

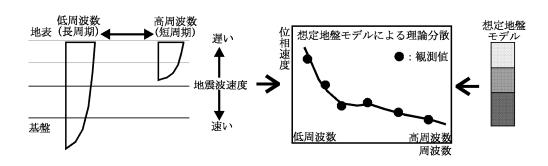


図-5 表面波の伝播速度

表面波伝播速度の分散はその場所の地盤構造に強く依存するため、複数の地震計で表面波の伝播速度を捉え、それを満足するような層構造を求めることが可能である(図-5の右)。表面波で構成される常時微動のアレー観測(通常は上下動成分を計測し、Rayleigh 波を仮定して解析をおこなう)から地下深部の地盤構造が推定できるのは、このような原理に基づいたものである。一般に、長周期の表面波(ここでは Love 波を扱う)位相速度は最下層(基盤)のS波速度に漸近し、短周期では表層のS波速度に漸近する。ここで1点注意すべき事象が生じる。実体波の斜め入射では、水平方向の波動伝播速度は実体波そのものの伝播速度よりも速くなる。しかし、表面波の水平方向伝播速度はある層における実体波の伝播速度よりも遅い場合があり得る。伝播速度に注目して(4)式を変形すると、

$$\frac{\omega}{r_m} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_m}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{p_m}\right)^2} \tag{7}$$

となる。ここで, p_m 、 r_m はそれぞれ水平・鉛直方向の伝播速度である。 $p_m < c_m$ の場合に平方根の中が負になるため,(7)式は,

$$\frac{\omega}{r_m} = i \sqrt{\left(\frac{\omega}{p_m}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c_m}\right)^2} \tag{8}$$

と扱う。したがって、表面波の伝播を扱う場合には、(4)式も、

$$s_m = \sqrt{k_m^2 - q^2} \qquad p_m > c_m \tag{9}$$

$$S_m = i\sqrt{q^2 - k_m^2} \qquad p_{\text{m}} < c_{\text{m}} \tag{10}$$

と使い分ける必要がある。

4. Love 波の位相速度

次に、水平成層地盤を伝播する Love 波の位相速度を計算してみる。基本は Haskell Matrix なので、既出の Haskell Matrix の展開を、斜め伝播を考慮して示す。ただし、ここでは減衰を考慮せず、ひずみによる剛性低下も考えない。まず、図-2、3に示す波動場を仮定する。このとき、第m層における変位と応力は、

$$u_m(z_m) = A_m \cdot \exp(is_m z_m - iqx) + B_m \cdot \exp(-is_m z_m - iqx) \tag{11}$$

$$\tau_m(z_m) = i s_m \mu_m A_m \cdot \exp(i s_m z_m - i q x) - i s_m \mu_m B_m \cdot \exp(-i s_m z_m - i q x) \tag{12}$$

となる。これらをマトリックス表示し、 $Z_m=H_m$ とすると、

$$\begin{pmatrix} u_m(H_m) \\ \tau_m(H_m) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(is_m H_m) & \exp(-is_m H_m) \\ i\mu_m s_m \exp(is_m H_m) & -i\mu_m s_m \exp(-is_m H_m) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix}$$
 (13)

のようになる。このとき,すべての項に共通する $\exp(-iqx)$ は省略して示している。対象周波数 における s_m が導かれると,(9) あるいは(10) 式より q を得ることが可能である。ここで,斜め伝播の Haskell Matrix の表現は,鉛直伝播のものと全く同じとなった。これは,水平方向の伝播 $(\exp(-iqx)$ で表現される)が全層で共通であるため,鉛直方向伝播においてのみ地盤応答を評価できる条件が設定可能である,ということを意味している。(13) 式で $z_m=0$ とすると,

$$\begin{pmatrix} u_m(0) \\ \tau_m(0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_m s_m & -i\mu_m s_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix}$$
 (14)

となる。これら2式から Am, Bmを消去し、オイラーの公式を用いれば、

を得る。これで、堆積層の上面と下面をつなぐマトリックスを得ることができた。ここで、マトリックス部を $[T_m]$ と表記し、第m層と第m-1層の境界で変位と応力が連続である条件、

を適用すると,

となり、以下に示すように各層の上面での波動を順次計算することができる。

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ \tau_n(0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R_{n-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ \tau_{-1}(0) \end{pmatrix}$$
 (18)

$$[R_{m-1}] = [T_{m-1}] [T_{m-2}] \dots [T_2] [T_1]$$
(19)

地表面では応力が0なので ($\tau_1(0)=0$), 上式から,

$$u_n(0) = R_{n-1}(1,1) \cdot u_1(0) \tag{20}$$

$$\tau_{n}(0) = R_{n-1}(2,1) \cdot u_{1}(0) \tag{21}$$

が導かれる。これら2式と、第n層における波動場の表現である、

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ \tau_n(0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_n s_n & -i\mu_n s_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$$
 (22)

の関係を連立させ、(20)~(22)で表される4つの方程式から、 B_n 、 $u_n(0)$ 、 $\tau_n(0)$ を消去すると、

$$u_1(0) \left(R_{n-1}(1,1) - i \frac{R_{n-1}(2,1)}{\mu_n s_n} \right) = 2A_n$$
 (23)

を導くことができる。表面波の存在は、入射波 (A_n) が無い状態でも安定した波動場が構成され、波動伝播が表現されることで定義されるので、(23)式が A_n =0 で恒等的に成立するためには、

$$R_{n-1}(1,1) - i\frac{R_{n-1}(2,1)}{\mu_n s_n} = 0 (24)$$

が Love 波が安定して存在する条件となる。式(24)は複素数であるが、実際には虚数成分を持たない実数成分のみとなる。これを満たす s_n を導き、(9)式からqを得ることで、表面波の伝播速度を評価することができる。

以上を2層問題に単純化すると, (24)式と(15)式を用いて,

$$\cos(s_1 H_1) - i \frac{-\mu_1 s_1 \sin(s_1 H_1)}{\mu_2 s_2} = 0 \tag{25}$$

と表現することができる。これを変形すると,

$$\tan(s_1 H_1) = -i \frac{\mu_2 s_2}{\mu_1 s_1} \tag{26}$$

が得られる。2層構造の場合の位相速度は第1層と第2層のS波速度の中間となるため、波数の 鉛直成分を求める際に、第1層には(9)式が、第2層には(10)式が適用されるので、(26)式は、

$$\tan(H_1\sqrt{k_1^2 - q^2}) = \frac{\mu_2\sqrt{q^2 - k_2^2}}{\mu_1\sqrt{k_1^2 - q^2}}$$
(27)

とできる。周波数を固定すれば k_I , k_2 は既知量なので、(27)式を満たす qを求めれば良い。しかし、ここでは左辺の tangent が周期関数であることに注意する必要がある。 (27)式の解は、

$$(n-1)\pi < H_1 \sqrt{k_1^2 - q^2} < \frac{(2n-1)\pi}{2}$$
 , $(n=0, 1, 2, ...)$ (28)

の範囲で複数個得られることになる。この時の n が表面波のモードに対応する。最も小さい q が 基本モードと呼ばれる。

5. 2分法による数値解法

(24) 式を数値的に解くには、現在の計算機性能であれば総当たりで最適解を検索する方法も考えられるが、ここでは古典的な数値解法である「2 分法」を紹介する。(24) 式が対象としているのは s_n であるので、まずこの解の範囲を定義する。通常は、位相速度(ω/q)がS波速度の最小値と最大値の間に決まることから、(9)、(10) 式と各層のS波速度を用いて s_n の範囲を与えることができる。ただし、(24) 式は1 価関数ではなく、表面波のモードによって複数の解を持っている。そのため、実際にはその探索範囲設定にはモードを考慮する必要があが、ここでは関数が1 価であることを前提に解説する。図-6 に示すように、ある1 価関数 f(x) が、 x_1 から x_2 の範囲に解 (f(x)=0) を持つ場合を考える。

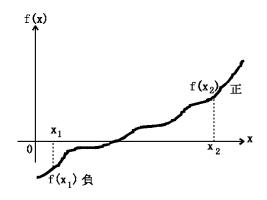


図-6 2分法の原理(1)

このとき、 $f(x_l)$ は負、 $f(x_2)$ は正となり符号が異なる。これが1価関数の解が間にある条件である。次に、 x_l と x_2 の中間に x_3 を仮定し、 $f(x_3)$ を求める。この符号を $f(x_l)$ 、 $f(x_2)$ の符号と比較することにより解がどちら側にあるかが分かるので、その両端を新たな x_l 、 x_2 とし、中間に新たに x_3 を仮定する。このプロセスを順次続けることにより、 x_3 は真の解に近づいてゆく(図-7)。

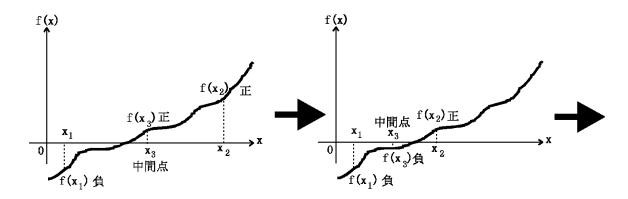


図-7 2分法の原理(2)

最終的にその誤差が許容範囲以内に収まれば、その値を解として用いることができる。以上が「2 分法」の原理である。

6. 群速度

表面波の伝播速度は、周波数毎の位相(波の山谷)が伝播してゆく位相速度の他に、表面波を 構成する波群が伝播してゆく速度である群速度が定義される。

安定した表面波の波群は、周波数の近い成分で構成される。周波数範囲が大きいと分散性が著しくなり、安定して存在できない。水平方向の波数をqとすると、群速度gは、

$$g(\omega) = \frac{d\omega}{dq(\omega)} \tag{28}$$

と各周波数による微分で定義される。(3)式が単一周波数で定義されるのに対して、群速度は周辺の周波数成分の影響を受けることが特徴である。(28)式より、周波数による位相速度の変化が小さいほど群速度が大きく、位相速度が大きく変化すると低い群速度となることが分かる。群速度が極小値となる周辺では波動のエネルギーがまとまって進むため、大きな振幅の表面波となり易い(エアリー相)。

Love 波の位相速度および群速度について理解を深めるために、上記計算法に基づいたエクセル

(Excel は Microsoft 社の登録商標)のテンプレート・ファイル(love.xls)を別途添付している(付録A)。参考にされたい。なお、本解説に添付するエクセルのテンプレート・ファイルを利用するにあたっては、第l 講「震源断層近傍域の地震動」の付録Aを参照されたい。

付録A 水平成層地盤による Love 波の位相速度・群速度(love. xls)

1)内容

"Parameters"シートで地盤条件を入力し、"Calculation"シートの条件で設定された各周波数による、Love 波位相速度および群速度を計算する例題である。

以下に示すプログラム例は、上述の内容を簡単にコード化したものである。Haskell Matrix を 用いた正攻法の位相速度計算は特に低周波数でかなり不安定であり、ここに示した例だけでは十 分な精度での計算は困難であることに注意されたい。

2) "Parameters" シート

他のシートから "Parameters" シートに移動した場合、赤字の部分に数値入力を求めるメッセージが表示されるが、その際に「OK」をクリックすれば図-1の状態になる。このシートの入力値は、赤字で示されている、層数および各層の厚さ、S波速度、密度である。添付した VBA プログラムでは層数の最大を 10 層に制限している。

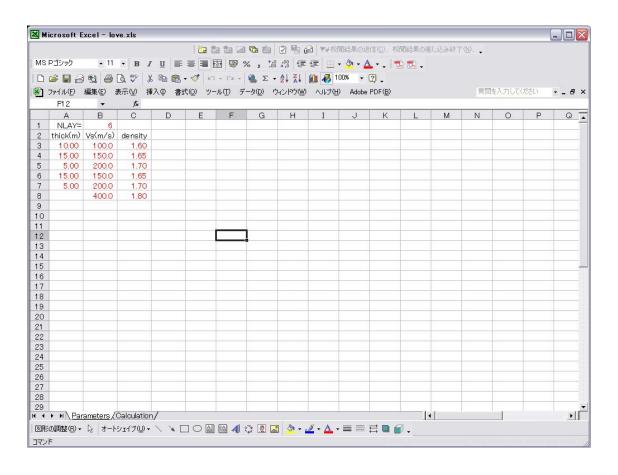


図-1 "Parameters" シートが表示された状態

3) "Calculation" シート

他のシートから "Calculation" シートに移動した場合,赤字の部分に入力を促すメッセージが表示されるが,「OK」をクリックすれば図-2の状態になる。このシートの入力値は,赤字で示されている,計算周波数ポイント数,その周波数間隔,および開始周波数率である。なお,群速度の計算はここで設定する周波数間隔を用いた差分計算で実施しており,間隔が細かいほど精度は高くなる。マクロによる計算は,以下のふたつのボタンによって実行される。

[クリア]:計算結果とそれを図示した内容をクリアする。

[計算]: "Parameters" シートの地盤条件に基づいて設定周波数期との位相速度と群速度を計算し、その結果を図示する。

マクロによる計算結果例を図-3に示す。低周波数での位相速度、群速度は最下層のS波速度に近くなり、高周波数では最表層のS波速度に近くなっている。なお、群速度は周波数 1.1Hz 付近でエアリー相を示していることが分かる。

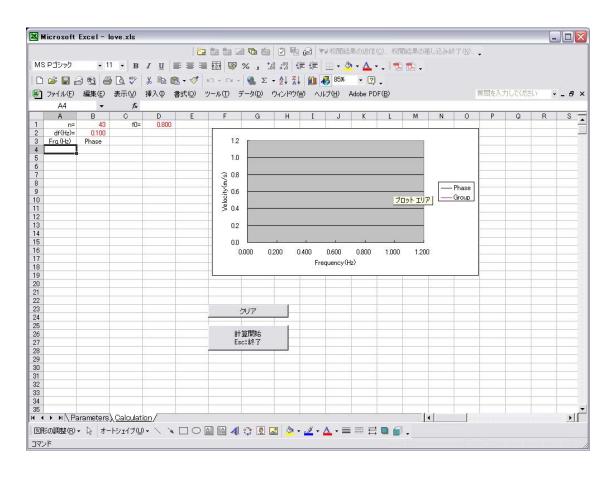


図-2 "Calculation" シートが表示された状態

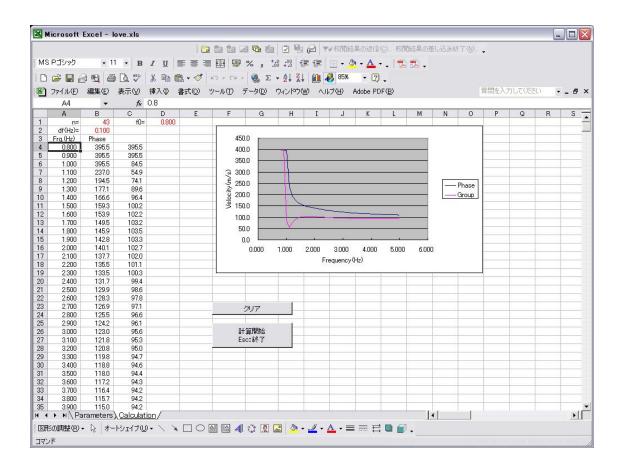


図-3 "Calculation"シートの計算結果

Ⅲ 離散化波数 (Discrete Wavenumber) 法 (AL 法)

1. 1次元波動場と2次元波動場

Haskell Matrix では、地盤構造が水平で地震波が上下方向にしか伝播しない場合を対象としていた。一般に、堆積地盤は山地から湾岸部へと傾いた構造をしており、このような層境界での反射・屈折によって、地震波も様々な方向に複雑に伝播していと考えられる。また、水平成層地盤であっても、震源から球面状に広がる波動を考えた場合、様々な方向に複雑に伝播する波動が生じる。第VI講では、そのような波動の典型例として水平成層地盤における表面波を取り扱ったが、ここでは不整形地盤における波動伝播を取り扱う。かなり数式が多くなるが、とりあえず手法のイメージを理解できれば十分と思う。

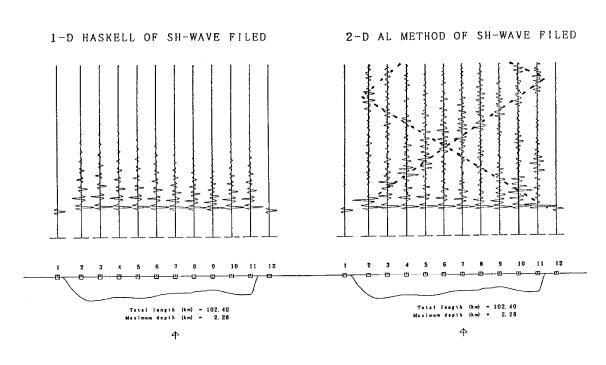


図-1 1次元波動場(左)と2次元波動場(右)

図-1は、不整形な地盤モデルを想定し、どのような地表面地震動が生じるかを数値計算で示した例である。図には、一番左に示される単純な波形を入射波とした場合の計算波形を表している。左側の計算例は、計算点直下の層境界が水平に続いていると仮定し、上下方向の波動伝播のみを考慮して計算したものである(1次元波動場)。堆積層内部では直達波の振幅が岩盤よりも大きく、堆積層の厚さに応じた時間遅れで反射を繰り返している様子が見られる。右側のものは、様々な方向に伝播する波動を考慮した計算結果である(2次元波動場)。岩盤と堆積層との境界付近から、破線で示す波動が堆積層内を往来する様子が見られる。この波動は堆積層端部の不整形構造から2次的に生じたもので、地表面を水平に伝播してゆくことから(盆地生成)表面波と呼ばれている。また、堆積層の端部では、岩盤の形状がレンズのように作用した直達波の集中と、

直達波と表面波との干渉が相乗し、振幅の特に大きくなる地点が見られる。このような堆積盆地構造では、波動が上下方向のみに伝播する1次元波動場の仮定では不十分であり、堆積盆地全体の複雑な波動伝播を考慮する必要がある。

2. 2次元波動場の表現

1次元波動場で用いた Haskell Matrix を拡張し、2次元波動場を表現する方法について示す。 先の第VI講では水平に伝播する表面波のみを対象としたが、ここではより一般的な波動伝播の解 説をおこなう。まず、多方向に伝播する波動の表現方法について述べる。堆積層内の地震波伝播 速度 c と対象とする周波数 ω が決まれば、その堆積層を伝播する波動の波数 k がただひとつに決 まる $(k=\omega/c)$ 。図-2 に示すように、2 次元波動場ではこれを水平波数 (k_x) と鉛直波数 (k_z) に分けて考える。以下の説明では水平方向を x 軸としている。このとき、合成波数 k と k_x , k_z の間には、

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2}$$
 (1)

の関係があり、 k_x を-kから+kの間で変化させることにより、多方向に伝播する波動場を表現できる。この概念を、1次元波動場の場合と比較して、図-3に示す。

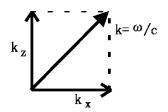


図-2 波数による伝播方向の表現

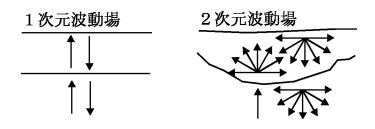


図-3 多方向に伝播する波動の表現

図-3に示した概念に従って、2次元波動場の表現をおこなう。上下方向だけに伝播する、ある層内の変位は、

$$U(z) = A \cdot \exp(ikz) + B \cdot \exp(-ikz) \tag{2}$$

であった。これに水平方向に伝播する成分を加味することにより,

$$U(z) = [A \cdot \exp(ik_z z) + B \cdot \exp(-ik_z z)] \cdot \exp(ik_x z)$$
(3)

のような表現が得られる。いろいろな伝播方向を示す指標とするため、複数の k_{x_n} (= $-k_x$, ..., $+k_x$) を考えると、

$$U(z) = \sum_{i=1}^{N} [A_n \cdot \exp(ik_{zn}z) + B_n \cdot \exp(-ik_{zn}z)] \cdot \exp(ik_{xn}x)\Delta k$$
 (4)

のように上向き方向の複数の波(A_n)と、下向きに伝播する複数の波(B_n)の足し合わせで波動場を表現することができる。この表現の理解を助けるため、1次元波動場の表現から2次元波動場の表現が構成される様子を図-4に示す。厳密には波数 $k_{x,n}$ に関する積分表現となるが、ここでは数値解法を用いるために離散表現としている。

ひとつの層内の変位を規定する係数が、1次元波動場では上向き(A)と下向き(B)のふたつであったのに対して、2次元波動場の場合には、上向きと下向きに各n個の、合計2n個に増えている。また、1次元波動場では層境界での条件が変位と応力の連続性のふたつであり、地盤応答の計算は2変数の連立方程式を解くことであった。2次元波動場の場合は、図-1で明らかなように、場所によって変位も応力も異なっている。このため、境界条件も複数設定することができ、変数が2n個の大きな連立方程式を作って解くことにより、係数 A_n , B_n を決めることができる [Aki and Larner(1970)]。多層構造の場合は、Haskell Matrix の場合と同様に、各層の影響を表現する Matrix を掛け合わせて1層と同等に扱うことができる [堀家(1987)]。また、3次元問題への拡張も可能である [上林(1991)]。

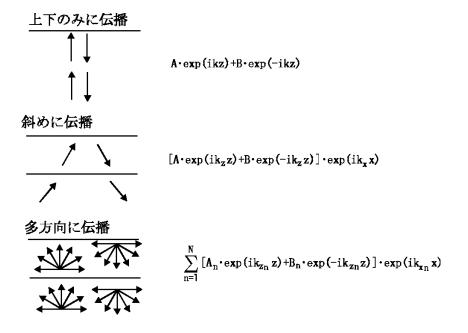


図-4 1次元波動場から2次元波動場へ

このように、離散化した水平波数で波動場を表現する方法を「離散化波数法 (Discrete Wavenumber Method)」と呼ぶ。また、Aki and Larner (1970)の先駆的な論文に因んで、AL 法と呼ばれることもある。以下に、堆積層と岩盤の2層問題について解説する。

3. 2層問題における解法

図-5に示すような不整形地盤構造を仮定し、m=2とする。このような地盤の下方より平面 SH 波が入射した場合の地表面での応答を考える。

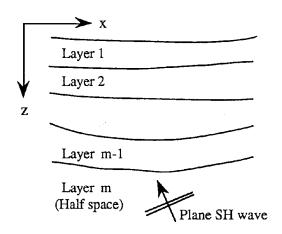


図-5 対象とする地盤モデル

第1層(表層地盤)を伝播する波動の変位は,

$$U_{1}(x,z) = \sum_{n=-N}^{N} \left(A_{n}^{1} e^{iv_{n}^{1}z} + B_{n}^{1} e^{-iv_{n}^{1}z} \right) \cdot e^{ik_{n}x} \Delta k$$
 (5)

と表される。また、第2層(基盤:半無限地盤)の変位は、

$$U_{2}(x,z) = e^{-iv_{0}z}e^{ik_{0}x} + \sum_{n=-N}^{N}A_{n}^{2}e^{iv_{n}^{2}z}e^{ik_{n}x}\Delta k$$
(6)

となる。ここで、表記が煩雑にならないよう、水平方向の波数を k(図-20 k_x)鉛直方向の波数を ν (図-20 k_z)と置いている。上付きの数字は層数を、下付きの n は離散化波数を表しており、 k_n は1、2層で共通である(水平波数は保存される)。また、 k_0 、 ν_0 は入射波の波数を表している。波数の離散化は、対象とする構造の水平方向の長さを L として、

$$k_n = k_0 + \frac{2\pi n}{L} \qquad \text{where (n=-N, ..., 0, ..., N)}$$

のように考える。例えば、n=0 の時は入射波と同じ方向に伝播する波動を表し、n が大きくなるほど入射波と異なる方向に伝播する波動を表すようになる。 $2\pi/L$ は波数のサンプリング間隔であり、時間-周波数のフーリエ変換でいう 1/T (T は解析する波の時間長さ)に相当する。つまり、(7)式は波数をフーリエ変換で表現したことに相当する。

次に、図-6に示す境界条件を順に考えてゆく。

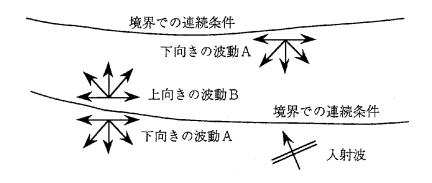


図-6 対象とする波動場と境界条件

まず、境界としての地表面の連続条件は第1層で z=0 における応力が 0 なので、地表面が水平であると仮定すると応力は z 方向の微分で表現できる。

$$\mu_1 \frac{dU_1(x,0)}{dz} = 0 \tag{8}$$

$$i\mu_{1} \sum_{n=-N}^{N} \left(A_{n}^{1} e^{iv_{n}^{1}z} - B_{n}^{1} e^{-iv_{n}^{1}z} \right) \cdot e^{ik_{n}x} \Delta k \Big|_{z=0} = 0$$
(9)

$$\sum_{n=-N}^{N} \left(A_n^1 - B_n^1 \right) e^{ik_n x} \Delta k = 0 \tag{10}$$

(10)式が恒等的に成り立つためには、 $A^{l}_{n}=B^{l}_{n}$ である。これを(5)式に代入してオイラーの公式を適用すると、

$$U_{1}(x,z) = 2\sum_{n=-N}^{N} A_{n}^{1} \cos(v_{n}^{1}z) e^{ik_{n}x} \Delta k$$
(11)

を得る。層境界の深さ分布(構造モデル)を $\xi(x)$ で表すと,第1層下面と第2層上面の変位, 応力の境界条件は,

$$U_{1}(x,z)|_{z=\xi(x)} = U_{2}(x,z)|_{z=\xi(x)}$$
(12)

$$\mu_{1} \frac{\partial U_{1}(x,z)}{\partial n}\Big|_{z=\xi(x)} = \mu_{2} \frac{\partial U_{2}(x,z)}{\partial n}\Big|_{z=\xi(x)}$$
(13)

となる。ここで、n は境界法線方向のベクトル (n_x, n_z) を表し、(13)式は境界に垂直な方向の応力が連続であることを示している。法線方向の微分は、

$$\frac{\partial}{\partial n} = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{14}$$

$$n_{x} = -\frac{d\xi}{dx} / \sqrt{1 + \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{2}}$$
 (15)

$$n_z = 1 / \sqrt{1 + \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2} \tag{16}$$

ある。(6), (11), (14)式を(12), (13)式に代入し, $z=\xi(x)$ とすれば,

$$\sum_{n=-N}^{N} \left(A_n^1 \cdot g^{11}(k_n, x) + A_n^2 \cdot g^{12}(k_n, x) \right) \cdot e^{ik_n x} \Delta k = h_1(x) e^{ik_0 x}$$
(17)

$$\sum_{n=-N}^{N} \left(A_n^1 \cdot g^{21}(k_n, x) + A_n^2 \cdot g^{22}(k_n, x) \right) \cdot e^{ik_n x} \Delta k = h_2(x) e^{ik_0 x}$$
(18)

と書くことができる。ここで,

$$g^{11}(k_n, x) = 2\cos(v_n^1 \xi(x)) \tag{19}$$

$$g^{12}(k_n, x) = -e^{iv_n^2 \xi(x)}$$
(20)

$$g^{21}(k_n, x) = 2\mu_1[ik_n n_x \cos(v_n^1 \xi(x)) - v_n^1 n_z \sin(v_n^1 \xi(x))]$$
(21)

$$g^{22}(k_n, x) = -\mu_2[ik_n n_x + iv_n^2 n_z] \cdot e^{iv_n^2 \xi(x)}$$
(22)

$$h^{1}(x) = e^{-i\nu_{0}\xi(x)}$$
 (23)

$$h^{2}(x) = \mu_{2}[ik_{0}n_{x} - i\nu_{0}n_{z}] \cdot e^{-i\nu_{0}\xi(x)}$$
(24)

である。(17), (18)式をひとまとめにすると,

$$\sum_{n=-N}^{N} \left(A_n^1 \cdot g^{j1}(k_n, x) + A_n^2 \cdot g^{j2}(k_n, x) \right) \cdot e^{i(k_n - k_0)x} \Delta k = h^j(x) \quad \text{where (j=1, 2)}$$

となる。次に、 k_n に対して(7)式を適用すると、

$$\sum_{n=-N}^{N} \left(A_n^1 \cdot g^{j1}(k_n, x) + A_n^2 \cdot g^{j2}(k_n, x) \right) \cdot e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \Delta k = h^j(x) \quad \text{where (j=1, 2)}$$

を得る。これが、 A^{l}_{n} 、 A^{l}_{n} を得るために解くべき境界条件の式である。

4. 連立方程式による表現

連立方程式を構成するためには、対象とする領域でnの数だけ異なったポイント(x) において(26)式を与え、それを連立1次方程式する方法が考えられる。しかし、ここではxについても波数表現をおこなうこととし、(26)式をxについてフーリエ変換する。

$$G_{nm}^{j1} = \frac{1}{L} \int_0^L g_n^{j1}(x) \cdot e^{\frac{2\pi i(n-m)x}{L}} dx$$
 (27)

$$G_{nm}^{j2} = \frac{1}{L} \int_0^L g_n^{j2}(x) \cdot e^{\frac{2\pi i (n-m)x}{L}} dx$$
 (28)

$$H_{m}^{j} = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} h^{j}(x) \cdot e^{\frac{2\pi i m x}{L}} dx \qquad \text{where (j=1, 2) (n, m=-N, ..., 0, ..., N)}$$
 (29)

計算上は、FFT を用いて g^{j1}_{nm} 、 g^{j2}_{nm} 、 g^{j}_{nm} の離散フーリエ・スペクトルを得る。このとき、m の離散化範囲を -N' $\sim N$ ' とすると、FFT で得られた値は、 $1 \sim N$ ' が $1 \sim N$ ' に、 $(N-N'+1)\sim N$ が -N' ~ -1 に相当する。

これらを用いると, (26)式は,

$$\sum_{n=-N}^{N} \left(A_n^1 \cdot G_{nm}^{j1} + A_n^2 \cdot G_{nm}^{j2}(x) \right) \Delta k = H_m^j \quad \text{where (j=1, 2) (n, m=-N, ..., 0, ..., N)}$$
(30)

と変形される。(30)式をマトリックス表記すると、

$$\begin{pmatrix} G_{nm}^{11} \Delta k & G_{nm}^{12} \Delta k \\ G_{nm}^{21} \Delta k & G_{nm}^{22} \Delta k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^1 \\ A_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_m^1 \\ H_m^2 \end{pmatrix} \quad \text{where } (n, m=-N, \dots, 0, \dots, N)$$
(31)

となる。(31)式の左辺は(4N+2)行(4N+2)列のマトリックスと1行(4N+2)列のベクトルで,右辺は 1行(4N+2)列のベクトルで構成され,未知数(4N+2),境界条件(4N+2)の連立一次方程式となって いる。N は最大で構造の離散化数に対応するが,計算上はそれより小さい値で十分である。通常,計算したい最低の表面波伝播速度を C_m とすると, $N'=(L/2\pi)*(\omega/C_m)$ 程度が用いられる。この時, C_m は対象構造モデルの最小地震波伝播速度よりもやや大きい程度の値となる。

これを解くことによって A'_n が得られれば,(11)式を用いて任意の位置 xにおける地表面変位を周波数領域で得ることができる。これをフーリエ逆変換することにより,地表面変位波形を計算することができる。(6)式では,入射波としては振幅 1 で位相の揃った波動(インパルス)を仮定したことになるので,得られた変位波形はインパルス応答に相当する。任意波形の平面波入射による地表変位を得る場合は,(11)式で導かれたインパルス応答と入射波形を周波数領域で掛け合わせておけば良い。

5. 手法の限界

離散化波数法の適用にあたっては、注意すべき点がふたつある。

ひとつは、構造に離散フーリエ変換を施す際に仮定した構造の周期性である。長さ L の区間に離散フーリエ変換をおこない、構造を波数で表現している。このとき x 方向の構造は、図-7 に示すように、長さ L の単位で同じものが無限に連続していることになる。また、そのため構造の両端は連続している必要がある。このため、計算が長時間になると、隣の構造から浸みだした波動の影響を受けるようになる(Wrap Round)。これを避けるためには、L をある程度長く取る必要がある。また、波数領域で強制的な減衰を施し、それを時間領域で補償する方法が併用されることもある。

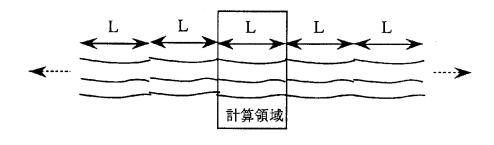


図-7 波数離散化によって仮定している構造モデル

もうひとつの問題点は、層内の波動を上向きに進むものと下向きに進むものに分けて計算することにある。例えば、図-8に示すように、基盤面の層境界が大きく傾斜している場合、基盤入射によって上向きに生じる反射波を考慮することができない。このとき、境界条件にエラーが含まれ、連立一次方程式が特に高周波数で安定に解けなくなる。このようなエラーを Rayleigh Ansatz Error と呼んでいる。一般には、45 度を越える傾斜を含むモデルを用いないことが重要である。

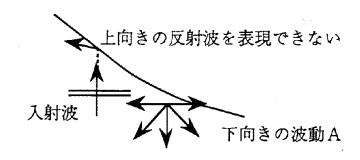


図-8 Rayleigh Ansatz Errorの成因

6. LU 分解による連立 1 次方程式の解法

(31)式の連立 1 次方程式を解くための解法として、最も基本的な LU 分解による手法について示す。この方法は、基本的に Gauss の消去法である。

対象とする連立1次方程式を,

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
x_3 \\
x_4
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
b_1 \\
b_2 \\
b_3 \\
b_4
\end{pmatrix}$$
(32)

とする。まず、第1列の第2行以降に、

$$m_{j1} = \frac{a_{j1}}{a_{11}} \tag{33}$$

を掛けて第1列を引くと,

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
0 & a_{22} - m_{21}a_{12} & a_{23} - m_{21}a_{13} & a_{24} - m_{21}a_{14} \\
0 & a_{32} - m_{31}a_{12} & a_{33} - m_{31}a_{13} & a_{34} - m_{31}a_{14} \\
0 & a_{42} - m_{41}a_{12} & a_{43} - m_{41}a_{13} & a_{44} - m_{41}a_{14}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
x_3 \\
x_4
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
b_1 \\
b_2 - m_{21}b_1 \\
b_3 - m_{31}b_1 \\
b_4 - m_{41}b_1
\end{pmatrix}$$
(34)

となる。これを第2列目以降にも順次繰り返すと、最終的には、

$$\begin{pmatrix}
a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & a_{13}^{-1} & a_{14}^{-1} \\
0 & a_{22}^{-2} & a_{23}^{-2} & a_{24}^{-2} \\
0 & 0 & a_{33}^{-3} & a_{34}^{-3} \\
0 & 0 & 0 & a_{44}^{-4}
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
x_3 \\
x_4
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
b_1^{-1} \\
b_2^{-2} \\
b_3^{-3} \\
b_4^{-4}
\end{pmatrix}$$
(35)

と右上三角行列(D)が得られる。ここで、例えば右上の4行4列の要素は、

$$a_{44}^{4} = a_{44}^{1} - m_{41}a_{14}^{1} - m_{42}a_{24}^{2} - m_{43}a_{24}^{3}$$

$$(36)$$

と表される。係数 a の右肩の数字は、何回目かの消去段階における行列の要素を示している。例 えば、(34)式に示すように、

$$a_{44}^{2} = a_{44}^{1} - m_{41}a_{14}^{1} \tag{37}$$

である。計算にあたっては、 m_{ji} が安定に求められるように、 a_{ii} が最大になるように、行を入れ替えて計算をおこなう。これを、Pivot の選択、と言う。

このとき,

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
m_{21} & 1 & 0 & 0 \\
m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\
m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1
\end{pmatrix}$$
(38)

で構成される左下三角行列(L)を導入すると、(32)式は、

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
m_{21} & 1 & 0 & 0 \\
m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\
m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & a_{13}^{-1} & a_{14}^{-1} \\
0 & a_{22}^{-2} & a_{23}^{-2} & a_{24}^{-2} \\
0 & 0 & a_{33}^{-3} & a_{34}^{-3} \\
0 & 0 & 0 & a_{44}^{-4}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
x_3 \\
x_4
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
b_1 \\
b_2 \\
b_3 \\
b_4
\end{pmatrix}$$
(39)

と書き直すことが出来る。(39)式は,

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
m_{21} & 1 & 0 & 0 \\
m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\
m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
y_1 \\
y_2 \\
y_3 \\
y_4
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
b_1 \\
b_2 \\
b_3 \\
b_4
\end{pmatrix}$$
(40)

$$\begin{pmatrix}
a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & a_{13}^{-1} & a_{14}^{-1} \\
0 & a_{22}^{-2} & a_{23}^{-2} & a_{24}^{-2} \\
0 & 0 & a_{33}^{-3} & a_{34}^{-3} \\
0 & 0 & 0 & a_{44}^{-4}
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
x_3 \\
x_4
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
y_1 \\
y_2 \\
y_3 \\
y_4
\end{pmatrix}$$
(41)

のふたつの連立方程式を順に解くことと等価である。これらの方程式の係数行列は LU 分解されているため、単純に解を得ることができる。

7. 参考文献

Aki, K. and K. L. Larner: Surface Motion of a Layered Medium Having an Irregular Interface

Due to Incident Plane SH Waves, J. G. R., 75, 5, 933-954, 1970.

堀家正則: 複数の曲がった境界を有する減衰のある媒質の地震動応答計算法へのAL法の拡張 とそれを用いた堆積盆地の地震動の特性,地震,2,40,247-259,1987.

森正武: FORTRAN77 数値計算プログラミング,岩波コンピュータサイエンス,岩波書店,1986.

上林宏敏: 断層震源による不規則境界を有する3次元堆積盆地の地震動特性,大阪工業大学博士論文,1991.

8. プログラム例

今回の内容はエクセル (Excel は Microsoft 社の登録商標)で表現するには非常に煩雑であり。また実用的ではないため、ここでは、FORTRAN によるコーディング例を紹介する(DWM. txt)。ただし、上述の内容をあくまで簡単にコード化したものであり、減衰も含んでいない。そのため、波形の Wrap Round 現象が生じるなど、実用的には改良の余地があることに注意されたい。なお、FFT (第 I 講参照)には「地震動のスペクトル解析入門、大崎順彦著、鹿島出版会、1982」、「新・地震動のスペクトル解析入門、鹿島出版会、大崎順彦著、1994.」を、LU 分解を用いた連立一次方程式には「FORTRAN77 数値計算プログラミング、森正武著、岩波コンピュータサイエンス、岩波書店、1986」によるサブルーチンを複素数化して利用することを前提としている。また、図化には CALCOMP 形式を用いている。とりあえずプログラムの雰囲気を掴んで頂ければと思う。

添付プログラムによる実行結果を図-9に示す。図の見方は図-1と共通である。入力波形としては単純な遠地変位波形を模擬した Ricker 波を用いている。振幅や継続時間、構造などの具体的な数値はプログラムのパラメータを参照されたい。

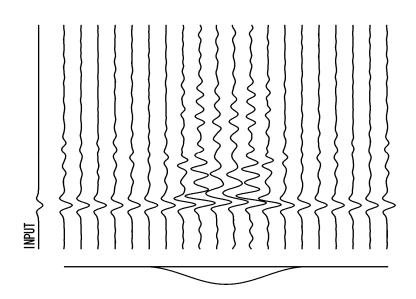


図-9 サンプル・プログラムの実行結果

Ⅷ 有限差分法 (FDM)

1. 差分法の概念

差分法は表現が簡単である上に適用範囲が広いため、地震波動伝播の一般的な計算手法として 定着している。計算容量の大きさが欠点ではあるが、近年の計算機の飛躍的な進歩により諸問題 への「最終兵器」として広く利用されている。ここでは、まず1次元波動を対象として、差分法 の概念に触れる。

1次元の波動方程式(空間変数は xのみ),

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

の時間領域における差分表現を考える。ここで,U(x,t)は位置 x,時間 t における変位であり,c は波動伝播速度を示している。図-1 に示す様に,時間・空間位置をともに等分割に離散化した時空間を考え,それぞれ以下の様に表す。

$$t = i \times \Delta t, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$x = j \times \Delta x, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$
(2)

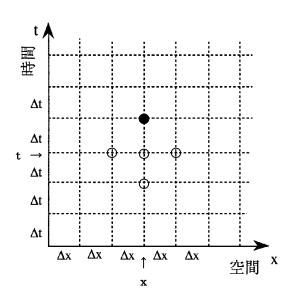


図-1 1次元波動伝播の差分格子

時間に対する, U(x, t) まわりの Taylor 展開は,

$$U(x,t+\Delta t) = U(x,t) + \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^{2} U(x,t)}{\partial t^{2}} (\Delta t)^{2} + \dots$$
 (3)

$$U(x,t-\Delta t) = U(x,t) - \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^{2} U(x,t)}{\partial t^{2}} (\Delta t)^{2} - \dots$$
 (4)

となる。式(3), (4)を加えて整理すると,

$$\frac{\partial^{2} U(x,t)}{\partial t^{2}} = \frac{U(x,t+\Delta t) + U(x,t-\Delta t) - 2 \times U(x,t)}{(\Delta t)^{2}} + \dots$$
 (5)

となる。ここで3次以上の高次の項を省略すると、 $(\Delta t)^2$ のオーダーの誤差(2次精度)で、

$$\frac{\partial^{2} U(x,t)}{\partial t^{2}} = \frac{U(x,t+\Delta t) + U(x,t-\Delta t) - 2 \times U(x,t)}{(\Delta t)^{2}}$$
(6)

と近似できる。同様に、空間に対しても $(\Delta x)^2$ のオーダーの誤差で、

$$\frac{\partial^{2} U(x,t)}{\partial x^{2}} = \frac{U(x + \Delta x,t) + U(x - \Delta x,t) - 2 \times U(x,t)}{(\Delta x)^{2}}$$
(7)

と表すことができる。したがって、 Δt 、 Δx を十分に小さくとれば、最初に示した波動方程式は、

$$\frac{U(x,t+\Delta t) + U(x,t-\Delta t) - 2 \times U(x,t)}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{U(x+\Delta x,t) + U(x-\Delta x,t) - 2 \times U(x,t)}{(\Delta x)^2}$$
(9)

と差分方程式として表すことができる。(9)式は、図-1に示した白丸のU(x,t)、 $U(x,t-\Delta t)$ 、 $U(x-\Delta x,t)$ 、 $U(x+\Delta x,t)$ の4点に黒丸の $U(x,t+\Delta t)$ を加えた5格子点の値を繋ぐ方程式となっており、時間 t および $(t-\Delta t)$ の既知の4値から次の時間ステップ $(t+\Delta t)$ における値を得る式となっている。これを空間、時間で順次繰り返してゆくことにより、図-1に示した時空間全体の波動を計算することができる。これが最も単純な差分表現となる。

2次元の場合は、波動方程式の空間変数が x と y になり、

$$\frac{\partial^{2}U(x,y,t)}{\partial t^{2}} = c^{2} \left(\frac{\partial^{2}U(x,y,t)}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}U(x,y,t)}{\partial y^{2}} \right)$$
(10)

と表現される。これを1次元の場合と同様に2次精度の差分方程式で近似すると,

$$\frac{U(x, y, t + \Delta t) + U(x, y, t - \Delta t) - 2 \times U(x, y, t)}{(\Delta t)^{2}} = c^{2} \left(\frac{U(x + \Delta x, y, t) + U(x - \Delta x, y, t) - 2 \times U(x, y, t)}{(\Delta x)^{2}} + \frac{U(x, y + \Delta y, t) + U(x, y - \Delta y, t) - 2 \times U(x, y, t)}{(\Delta y)^{2}} \right)$$
(11)

と表すことができる。

差分計算について理解を深めるために、上記の1次元表現に基づいたエクセル(Excel は Microsoft 社の登録商標)のテンプレート・ファイル(1dfdm.xls)を別途添付している(付録A)。また、2次元表現は第1講「震源断層近傍域の地震動」の付録C(2dfdm.xls)がその例題に相当し、空間を(x,z)-平面とした表記だが、上記よりも詳しい解説をおこなっている。参考にされたい。なお、本解説に添付するエクセルのテンプレート・ファイルを利用するにあたっての注意点は、第1講の付録Aを参照されたい。

2. Staggered-Gridによる表現

(10)式の波動方程式を2次元面外(SH)波動場と想定し、応力を介して表現すると、

$$\rho \frac{\partial^{2} u(x, y, t)}{\partial t^{2}} = \frac{\partial \tau_{x}(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{y}(x, y, t)}{\partial y}$$
(12)

$$\tau_{x}(x, y, t) = \mu \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}, \quad \tau_{y}(x, y, t) = \mu \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}$$
(13)

となる。ここで, ρ は密度, μ は剛性率である。面外波動場であるので,変位 Uおよび応力 τ は (x,y) -平面に直交する方向のみの成分を考えることになる(SH 波問題)。これを差分表現する。 (3),(4) 式を(x,y) -平面に拡張し,時間に関する微分をx に関する微分に置き換えた上で引き算し,更に 3 次以上の高次項を省略すると,

$$\frac{\partial \ u(x,y,t)}{\partial \ x} = \frac{u(x+\Delta x,y,t) - u(x-\Delta x,y,t)}{2\Delta x} \tag{14}$$

が得られる。ここで、応力 τ_{y} 、 τ_{v} を差分格子上にとらず、格子の中間点で定義すると、

$$\tau_{x}(x + \frac{1}{2}\Delta x, y, t) = \mu \frac{\partial u(x + \frac{1}{2}\Delta x, y, t)}{\partial x} = \mu \frac{u(x + \Delta x, y, t) - u(x, y, t)}{\Delta x}$$

$$\tau_{x}(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, t) = \mu \frac{\partial u(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, t)}{\partial x} = \mu \frac{u(x, y, t) - u(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x}$$
(15)

などとなる。これらを(12), (13)式に適用すると,

$$\rho \frac{u(x, y, t + \Delta t) + u(x, y, t - \Delta t) - 2 \times u(x, y, t)}{(\Delta t)^{2}} = \frac{\tau_{x}(x + \frac{1}{2}\Delta x, y, t) - \tau_{x}(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, t)}{\Delta x} + \frac{\tau_{y}(x + \frac{1}{2}\Delta x, y, t) - \tau_{y}(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, t)}{\Delta x}$$
(16)

$$\tau_{y}(x, y + \frac{1}{2}\Delta y, t) = \mu \frac{U(x, y + \Delta y, t) - U(x, y, t)}{\Delta y}$$

$$\tau_{y}(x, y - \frac{1}{2}\Delta y, t) = \mu \frac{U(x, y, t) - U(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y}$$
(17)

となり、(15)~(17)式が一連の差分表現を示すことになる。このように、変位と応力の計算位置を半格子ずらして表現することを Staggered-Grid (互い違い格子)と言い、計算の安定化のために用いられることが多い。以上を 3 次元波動場の表現にすることにより、 3 次元問題への拡張をおこなうこともできる。

3. Staggered-Grid を用いた3次元 FDM の表現

Pitarka(1999), Graves(1996)に従って, Staggered-Grid による3次元差分法の考え方について概説する。

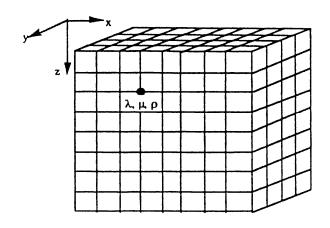


図-2 差分格子

計算対象とする領域を,図-2のような格子点の集合で表現する。実際には,この波動場が時間変化するため,もうひとつ仮想的な時間軸を想定しておく必要がある。格子上の各点には,弾性定数(λ , μ , ρ)が与えられている。これらの定数はP波速度,S波速度と関連したものである。

$$V_{P} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \tag{18}$$

$$V_{S} = \sqrt{\mu/\rho} \tag{19}$$

設定した各格子点での運動を表す方程式は,

$$\rho \partial_{u} u_{\chi} = \partial_{x} \tau_{xx} + \partial_{y} \tau_{xy} + \partial_{z} \tau_{xz} + f_{x}$$

$$\rho \partial_{u} u_{y} = \partial_{x} \tau_{xy} + \partial_{y} \tau_{yy} + \partial_{z} \tau_{yz} + f_{y}$$

$$\rho \partial_{u} u_{z} = \partial_{x} \tau_{xz} + \partial_{y} \tau_{yz} + \partial_{z} \tau_{zz} + f_{z}$$
(20)

となる。ここで、 u_x 、 u_y , u_z は各成分の変位、 τ_{xx} などは応力を示す。また、 ∂_u 、 ∂_x などは微分 オペレータ $\partial^2/\partial t^2$ 、 $\partial/\partial x$ の簡略表示である。したがって、(20)式の左辺は単位体積に作用する外力を、右辺の $1\sim3$ 項はそれが各方向に作用する応力差の和であることを示しており、ここまでは波動方程式と同じである。右辺第 4 項は外力項であり、発震メカニズムに応じた外力を、震源時間関数に応じて加えることにより、震源の効果を導入することができる。

(18) 式中の応力 τ は、ひずみと弾性定数との関係から、

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu)\partial_x u_x + \lambda \left(\partial_y u_y + \partial_z u_z\right)
\tau_{yy} = (\lambda + 2\mu)\partial_y u_y + \lambda \left(\partial_x u_x + \partial_z u_z\right)
\tau_{zz} = (\lambda + 2\mu)\partial_z u_z + \lambda \left(\partial_x u_x + \partial_y u_y\right)
\tau_{xy} = \mu \left(\partial_y u_x + \partial_x u_y\right)
\tau_{xz} = \mu \left(\partial_z u_x + \partial_x u_z\right)
\tau_{yz} = \mu \left(\partial_z u_y + \partial_y u_z\right)$$
(21)

で表される。上3つが体積変化による応力(P波),下3つがせん断による応力(S波)である。

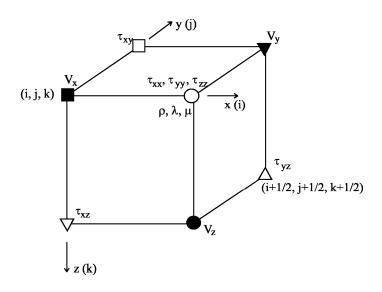


図-3 Staggered-Grid (互い違い格子) の基本概念

これら変位表示の方程式から速度を中心とした差分表現を導く。Staggered-Grid (互い違い格子) の概念 (図-3) を取り入れて定式化すると [Pitarka(1999)] ,以下のように書くことができる。ここで,密度の逆数として $b=1/\rho$ を用いている。

$$v_{xi,j,k}^{n+\frac{1}{2}} = v_{xi,j,k}^{n-\frac{1}{2}} + \left[\Delta t \overline{b_{x}} (D_{x} \tau_{xx} + D_{y} \tau_{xy} + D_{z} \tau_{xz} + f_{x}) \right]_{i,j,k}^{n}$$

$$v_{yi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} = v_{yi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}} + \left[\Delta t \overline{b_{y}} (D_{x} \tau_{xy} + D_{y} \tau_{yy} + D_{z} \tau_{yz} + f_{y}) \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n}$$

$$v_{yi+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = v_{zi+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \left[\Delta t \overline{b_{z}} (D_{x} \tau_{xz} + D_{y} \tau_{yz} + D_{z} \tau_{zz} + f_{z}) \right]_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n}$$

$$\tau_{xi+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} = \tau_{xxi+\frac{1}{2},j,k}^{n} + \Delta t \left[(\lambda + 2\mu)D_{x}v_{x} + \lambda (D_{y}v_{y} + D_{z}v_{z}) \right]_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\tau_{yyi+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} = \tau_{yyi+\frac{1}{2},j,k}^{n} + \Delta t \left[(\lambda + 2\mu)D_{y}v_{y} + \lambda (D_{x}v_{x} + D_{z}v_{z}) \right]_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\tau_{zzi+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} = \tau_{xzi+\frac{1}{2},j,k}^{n} + \Delta t \left[(\lambda + 2\mu)D_{z}v_{z} + \lambda (D_{x}v_{x} + D_{y}v_{y}) \right]_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\tau_{xyi,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} = \tau_{xyi,j+\frac{1}{2},k}^{n} + \Delta t \left[\overline{\mu_{xy}} (D_{y}v_{x} + D_{x}v_{y}) \right]_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\tau_{xzi+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n} = \tau_{xzi,j,k+\frac{1}{2}}^{n} + \Delta t \left[\overline{\mu_{xz}} (D_{z}v_{x} + D_{x}v_{z}) \right]_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\tau_{yzi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n} = \tau_{yzi,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n} + \Delta t \left[\overline{\mu_{xz}} (D_{z}v_{y} + D_{y}v_{z}) \right]_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\tau_{yzi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n} = \tau_{yzi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n} + \Delta t \left[\overline{\mu_{xz}} (D_{z}v_{y} + D_{y}v_{z}) \right]_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\tau_{yzi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n} = \tau_{yzi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n} + \Delta t \left[\overline{\mu_{xz}} (D_{z}v_{y} + D_{y}v_{z}) \right]_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\tau_{yzi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n} = \tau_{yzi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n} + \Delta t \left[\overline{\mu_{xz}} (D_{z}v_{y} + D_{y}v_{z}) \right]_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$$

式中, Δt は計算の時間刻みを示している。また, 各空間格子の幅が全方向で h とすると, $v_{x_{i+\frac{1}{n},i,k}}$ は x=(i+1/2)h, y=jh, z=kh, t= $(n+1/2)\Delta t$ における, x方向の速度を示している。

図ー3に示したように[Pitarka(1999)], 求めるべき値を中間刻み幅で互い違いに配置していることが、Staggered-Grid 表現の特徴である。図ー3および式(22)、(23)から明らかなように、 τ_{xx} 、 τ_{yy} , τ_{zz} および λ , μ , $b(=1/\rho)$ は (i+1/2, j, k) の計算格子上に与えらている。また、 v_{x} , v_{y} , v_{z} はそれぞれ (i, j, k), (i+1/2, j+1/2, k), (i+1/2, j, k+1/2) の位置にあり、 τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} は (i, j+1/2, k), (i, j, k+1/2), (i+1/2, j+1/2, k+1/2) に置かれている。これら、一辺 h/2 の立方体のひとかたまりを図ー2に示した物理量の空間分布として取り扱うことが、Staggered-Grid (互い違い格子) の概念である。 D_x などの表現は、空間微分オペレータ ∂_x などを離散的に表現したものであり、通常は以下の例に示す 4 次精度の表現が用いられる。この表現により、(7)式や(14)式に示した 2 次精度のものよりも安定した計算を実施することができる。

$$D_{x}v_{x}\Big|_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{h} \left\{ \frac{9}{8} \left[v_{x_{i,j,k}} + v_{x_{i-1,j,k}} \right] - \frac{1}{24} \left[v_{x_{i+1,j,k}} + v_{x_{i-2,j,k}} \right] \right\}$$
(24)

4次精度の場合、格子間隔の5倍程度以上の波長を扱うことができ、計算が安定して行われる 条件は、

$$\Delta t < 0.495 \frac{h}{v_{\text{max}}} \tag{25}$$

である。ここに、 v_{max} は対象領域における最大の地震波伝播速度(通常は基盤層のP波速度になる)である。

また,b および μ の一部に, \bar{b}_x , $\bar{\mu}_{xy}^H$ 等の表記が見られるが,これらは(i+1/2,j,k)の位置で与えられた値を格子の中間位置で用いるための処理を表現したものである。具体的には,下の例に示すように,周囲の格子を用いて値の平均化を行っている。

$$\overline{b}_{x} = \frac{1}{2} \left[b_{i + \frac{1}{2}, j, k} + b_{i + \frac{3}{2}, j, k} \right]$$
(26)

$$\overline{\mu}_{xy}^{H} = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mu_{i + \frac{1}{2}, j, k}} + \frac{1}{\mu_{i + \frac{3}{2}, j, k}} + \frac{1}{\mu_{i + \frac{1}{2}, j + 1, k}} + \frac{1}{\mu_{i + \frac{3}{2}, j + 1, k}} \right) \right]^{-1}$$
(27)

以上を踏まえれば、(22)、(23)式は次の時間ステップの値を求めるために、中間時間ステップでの微分係数を用いて逐次積分していることが分かる。この方法を用いた計算の利点は、式中に現れる微分が波動場に関するものだけであり、媒質に関する微分が必要ないことである。このため、複雑な媒質であっても、安定して数値計算をおこなうことができる。

なお、Graves (1996) に倣うことにより、周波数によらず一定の減衰を導入することができる。 具体的には、座標 (x, y, z) における S 波の減衰(Q値)を $Q_s(x, y, z)$ とすると、応力および速度を 計算する時間ステップ毎に、その座標点の応力、速度に以下の減衰項を掛けることで対応する。

$$A(x, y, z) = \exp\left[\frac{-\pi f_0 \Delta t}{Q_s(x, y, z)}\right]$$
 (28)

(28) 式中の f_o は Q_o 値を定義する参照周波数に相当し、各周波数での実効的な Q値は、参照周波数における値を Q_o とすれば、

$$Q(f) = Q_0 \frac{f}{f_0} \tag{29}$$

に対応する。

3. 境界(表層)の処理

表層は、計算領域を打ち切ったことによる周囲の人工的な境界と異なり、鉛直応力がフリーな自由表面として存在している。いま、iz=k+1/2で表される面を地表面と仮定すると、鉛直方向の応力がフリーとなる条件は、

$$\tau_{xz}\Big|_{iz=k+\frac{1}{2}} = 0 , \quad \tau_{yz}\Big|_{iz=k+\frac{1}{2}} = 0 , \quad \tau_{zz}\Big|_{iz=k} = -\tau_{zz}\Big|_{iz=k+1}$$
 (30)

と表される。 τ_{xz} , τ_{yz} は地表面上にあるため、その値をゼロとしているが、 τ_{zz} は地表面上に無い。そこで、地表面を挟んで対称という条件で地表面上での応力をゼロとしている。これらの条件を(22)、(23)式に適用することにより、以下に示す地表面の境界条件が得られる。

$$D_z v_z = \frac{-\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \left[D_x v_x + D_y v_y \right]_{iz=k}$$
(31)

$$\left(D_{x}\tau_{xx} + D_{y}\tau_{xy} + D_{z}\tau_{xz}\right)_{i,j,k} = \frac{v_{x}|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - v_{x}|_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{h^{2}}$$
(32)

$$\left(D_{x}\tau_{xy} + D_{y}\tau_{yy} + D_{z}\tau_{yzz}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{v_{z}|_{i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}} - v_{z}|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{h^{2}}$$
(33)

$$\left(D_{x}\tau_{xz} + D_{y}\tau_{yz} + D_{z}\tau_{zz}\right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{2\tau_{zz}|_{i,j,k+1}}{h}$$
(34)

地表面波形を計算する際には、iz=k+1/2 における、 v_x 、 v_y 、 v_z を補間して求めれば良い。

以上の表層境界条件は、水平な地表面を仮定したものである。地表面より上の物性をゼロにすること(真空状態)により不整形な地表面の導入も可能ではあるが、その場合は地表面で4次精度の差分近似が使えず、2次精度を採用せざるを得ない。その結果、計算が不安定になるとともに、計算できる波長が長くなる欠点がある。

また、周囲の境界についても吸収境界(無反射境界)を導入しなければ、計算領域を打ち切ることによる人工的な境界から生じる反射波が発生してしまい、実用的な計算が困難である。この処理には通常何グリッドかの吸収領域をおき、境界に至るまでに波動を徐々に減衰させるようにすることがおこなわれるが [例えば、Cerjen et al. (1985)], ここでは省略する。

4. 震源の導入

次に、震源としての外力((20)式の f_x , f_y , f_z)の導入について考える。点震源に作用する外力は、図-4に示す9個の力系に分解して表現することができる。この様な表現をモーメント・テンソルと呼ぶ。実際、各成分は、以下に示す 3×3 のテンソルを構成している。

$$\begin{pmatrix}
M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\
M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\
M_{zx} & M_{zy} & M_{zz}
\end{pmatrix}$$
(35)

図-4は, x, y, zの各軸に沿ってすべり面がある場合を示しているが, 実際の震源は任意の方向にすべり面を持つ。この場合は, 上のモーメント・テンソルに3次元的な回転を表すテンソルが乗じられた形で, モーメント・テンソルが表現される。

この様なモーメント・テンソルを用いた表現は、地震学で震源の動きを表現する場合に良く用いられている。一般に、断層のようなダブル・カップル型の震源ではモーメント・テンソルは対称で、かつ爆破震源の様な膨張・圧縮成分が無く、

$$M_{pq} = M_{qp}$$

$$M_{pp} = 0 (36)$$

の関係にある。

差分法では、対象とする震源のメカニズムから導出したモーメント・テンソルに応じた強制外力を、震源とする格子点の各方向に、震源継続時間だけ物体力として加えることにより、単一点震源を表現することができる。例えば、図 $-40~M_{xy}$ を点(i+1/2, j, k)に作用させるためには、

$$f_{x_{i-\frac{1}{2},j+1,k}}^{n} = \frac{M_{xy}(t)}{4h^{4}}, \quad f_{x_{i+\frac{1}{2},j+1,k}}^{n} = \frac{M_{xy}(t)}{4h^{4}}$$
(37)

$$f_{x_{i-\frac{1}{2},j,k}}^{n} = -\frac{M_{xy}(t)}{4h^{4}}, \quad f_{x_{i+\frac{1}{2},j,k}}^{n} = -\frac{M_{xy}(t)}{4h^{4}}$$
(38)

と,周辺4点に分散して外力として与えることになる[Graves(1996)]。 あるいは,

$$\tau_{xy\;i,j+\frac{1}{2},k}^{n} = \tau_{xy\;i,j+\frac{1}{2},k}^{n} - \Delta t \frac{\dot{M}_{xy}(t)}{h^{3}}$$
(39)

と, 応力として与えることも可能である [Pitarka (1999)]。

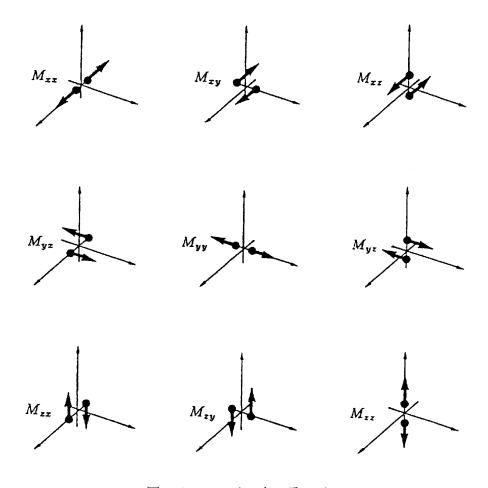


図-4 モーメント・テンソル

断層震源を考慮する場合は、断層面に沿った格子点上に複数の点震源を配置し、断層破壊の進行に応じてこれらの格子点に強制外力を加えて行けば良い。その際に、アスペリティ・モデルを導入することもできる。このように、差分法では格子点に加わる直接的な外力として震源を表現するため、震源のイメージが直感的に理解し易いものとなっている。

3次元差分計算について理解を深めるために、上記計算法に基づいたエクセル(Excel は Microsoft 社の登録商標)のテンプレート・ファイル(3dfdm. xls)を別途添付している(付録B)。 参考にされたい。ただし、計算領域端部からの反射波の処理(吸収境界など)および減衰については考慮していない。なお、本解説に添付するエクセルのテンプレート・ファイルを利用するに あたっては、第1講「震源断層近傍域の地震動」の付録Aを参照されたい。

5. 参考文献

- Cerjen, C., D. Kosloff, R. Kosloff, and M. Reshef: A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations, *Geophys*, **50**, 705-708, 1985.
- Graves, R. W.: Simulating Seismic Wave Propagation in 3D Elastic Media Using Staggered-Grid Finite Differences, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **86**, 1091-1106, 1996.
- Pitarka, A.: 3D elastic finite-difference modeling of seismic motion using staggered-grid with non-uniform spacing, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **89**, 54-68, 1999.

付録A 1次元波動方程式の差分計算(1dfdm. xls)

1)内容

0.1 m刻みの 100 点で離散化した線上を, 1 m/s で伝播する波動を 0.025 秒刻みで表現するという条件で, 1次元の波動方程式を差分法で逐次計算する例題である。

2) "Calculation" シート

本例題はこのシートのみで構成され、ファイルを開けば図-1の状態になる。マクロによる計算は、以下のふたつのボタンによって実行される。

[クリア]:計算結果を図示した内容をクリアする。

[計算]:設定条件に基づいて計算した変位の時間変化を図示する。

マクロによる計算結果例を図-2に示す。赤色が濃いほど正値の振幅が大きく、青色が濃いほど負に大きい振幅を示しており、中央部分で生じた強制変位が左右に伝播し、計算領域の両端で反射して戻って来ることを繰り返す。図-3に波形が変化する様子を示している。なお、線上の100点を1点おきの50点で表現し、計算時間の2ステップ毎に表示を更新している。

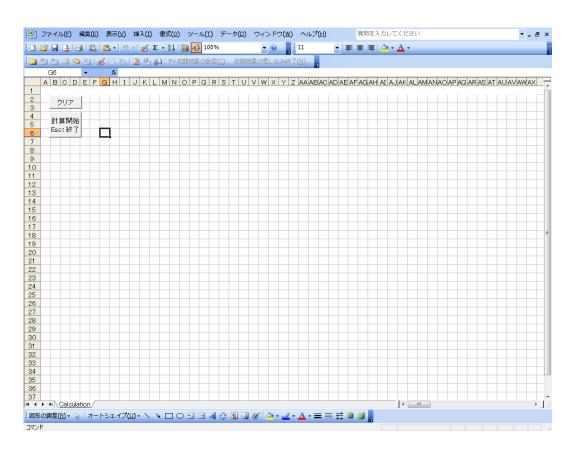


図-1 "Calculation" シートが表示された状態

計算パラメターはマクロ・プログラム中に記述している。第1講「震源断層近傍域の地震動」の付録Aを参照して"Visual Basic Editor"を起動すればマクロ・プログラムを閲覧・編集することができるので、計算条件を変更することができる。

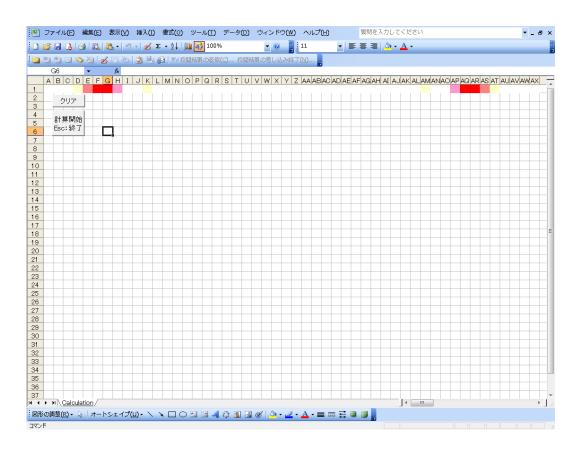


図-2 "Calculation"シートの計算途中の様子

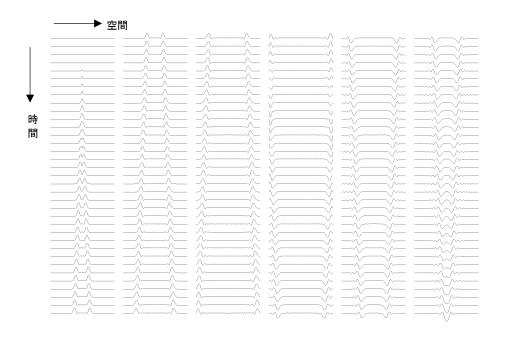


図-3 例題による波動伝播の時間変化の様子

付録B Staggered-Gridを用いた3次元差分計算(3dfdm.xls)

1) 内容

3次元地盤内に不整形な境界面を有する2層構造が存在し、その中を断層震源的に起因する波動が伝播する様子をStaggered-Gridを用いた3次元差分法で逐次計算する例題である。ただし、計算領域端部からの反射波の処理(吸収境界など)および減衰については考慮していない点に注意されたい。

2) "Parameters" シート

"Parameters"シートでは、計算パラメターおよび構造モデルを入力・設定する。他のシートから"Parameters"シートに移動すると、赤字の部分に数値を入力するよう促すメッセージが表示されるが、その際に「OK」をクリックすれば図-1に示す状態になる。

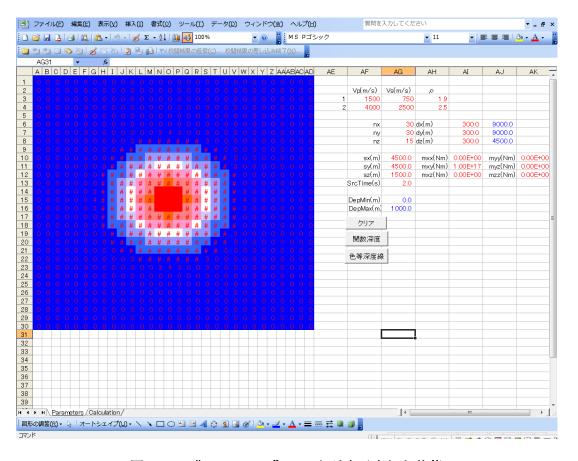


図-1 "Parameters" シートが表示された状態

左の色付きの領域は計算モデルの層境界深度の平面分布を示しており、青が濃いほど境界が浅く、赤が濃いほど深い。この例では中央部が深いコサイン型形状を回転させた円形の盆地構造となっている。右上には2層構造の物性値(Vp, Vs, 密度)を入力し、その下に平面方向(x, y)と深さ方向 z の計算格子点数と刻み幅を入力する。この例題では、x 方向は行(A, B, C, D. . .),

y 方向は列(1, 2, 3, 4, . . .),z 方向は深さを正としている。右の青字は入力値から自動計算される計算領域の大きさ(m)を示している。その下には,震源情報としてその位置とモーメント・テンソルおよび継続時間を入力する。震源時間関数(すべり速度)は三角形を想定している。なお,モデルの表示およびマクロによる計算プログラムは水平方向に 30×30 格子を前提としているので,それ以外の設定をおこなう場合はプログラムとシートの内容を変更する必要がある。

このシートには、マクロによる計算ボタンが3つ用意されており、それぞれ以下の機能を持っている。

[クリア]:表示された構造モデルをクリアする(図-2)。

[関数深度]:設定された関数形状(中央部が深いコサイン型形状を回転させた円形の盆地構造)で、直径 5,000 m、最大深さ 1,000 mのモデルを設定する(図-3)。このとき、赤色の数値は境界面までの深度(m)を示している。数値の大きい部分は"#"が表示されているが、図-3に示すように、境界深度の数値が入っている。なお、モデルについては、この数値を自由に編集して任意の境界形状とすることができが、計算領域(深さ)の大きさに注意されたい。

[色等深度線]:設定された層境界の形状の最小値(最も浅い)を濃い青,最大値(最も深い) を濃い赤として,モデルの形状を色等深度線で表現する。この時,最大値と最小 値をボタン群の上部に青字で表示する(図-1の状態)。

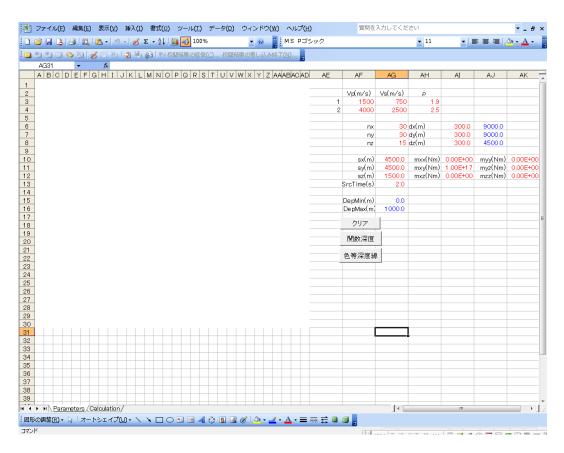


図-2 "Parameters" シートで「クリア」ボタンを押した状態

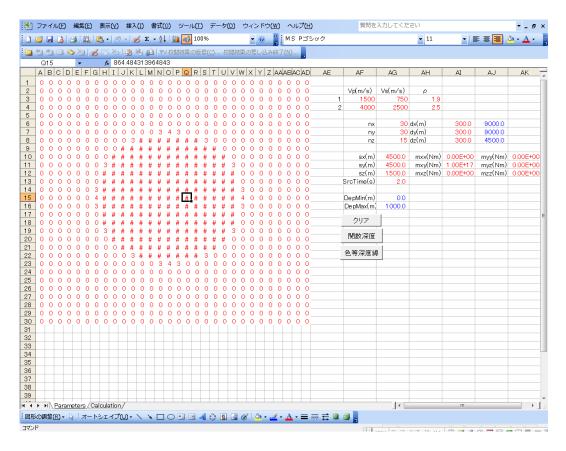


図-3 "Parameters" シートで [関数震度] ボタンを押した状態

3) "Calculation" シート

他のシートから "Calculation" シートに移動すると、赤字の部分に数値を入力するよう促すメッセージが表示されるが、その際に「OK」をクリックすれば図ー4に示す状態になる。右上の入力項目は計算時間刻み [dt] と総計算ステップ数 [nt] 、どの成分 (Vx, Vy, Vz) を表示するか [Plot Comp.] 、その時の振幅倍率 [Scale] と何ステップ毎に波動伝播を表示するか [Nplot] に相当する。これらは、計算条件に応じて見易いように適宜設定すれば良い(初期値は例題に適応して調整している)。これら本シート内の設定および "Parameters" シートの内容に沿って、3次元波動伝播の様子がマクロによって自動計算される。マクロによる計算は、以下のふたつのボタンによって実行される。

[クリア]:表示された波動伝播状況をクリアする。

[計算開始]: "Parameters"シートの設定値に基づいて計算された、波動伝播の様子が逐次更新されて表示される。赤が濃いほどプラスに大きく、青が濃いほどマイナスに大きい。また、表示される網掛けのセルが順に地震波を放射する震源の位置である。なお、計算・表示途中でEscキーを押すことにより、中断できる。

マクロによる計算結果例を図-5に示す。赤が濃いほどプラスに大きく、青が濃いほどマイナスに大きい振幅を示している。いろいろな条件、モデルで試されることをお勧めする。

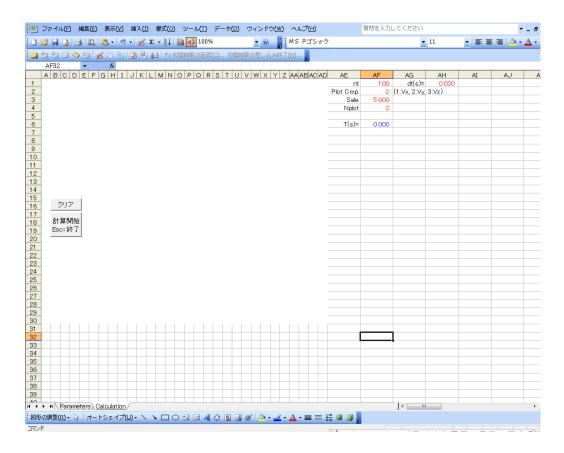


図-3 "Calculation"シートが表示された状態

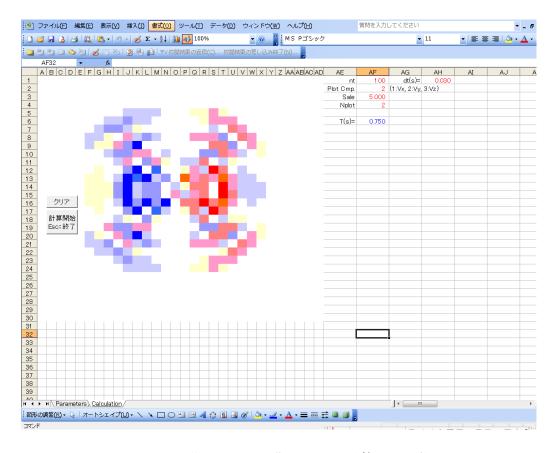


図-5 "Calculation" シートで計算中の状態

IX 経験的グリーン関数法

1. 大地震と小地震の違い

地震現象とは、地殻を構成する岩盤で生じた破壊(断層運動)に伴って波動が発生し、それが地表へと伝播して構造物などに影響を与えるものである。地震波動の生成と伝播は、図-1に示すように、断層においてどのような破壊が起こったか(震源特性)、生じた波動がどのように地殻内を伝播したか(伝播経路特性)、地盤構造によって地震波動がどのような影響を受けたか(地盤増幅特性)の3要因に分けて考えることができる。地震現象はこれら3要因によって複雑な挙動を示す。

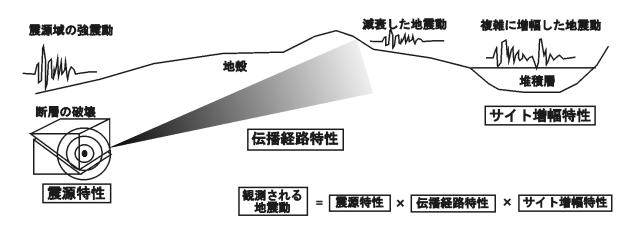


図-1 地震動を構成する要因

震源特性としては、どのくらいの規模の断層がどのように破壊したかの時間的・空間的な特徴が放射される地震動に影響を与える。断層から放射された地震波は、複雑な経路を辿って観測点の近傍に到来する。これらの中には、観測点近傍への最短経路を辿って来たもの、いったん地球の深部へ潜り込んで反射して来たものなどが含まれ、それぞれが辿った伝播経路に特徴付けられた性質を持っている。地震波が柔らかい堆積層に入射すると、振幅が大きくなるとともに、地盤の構成や層境界面の構造によって波形が複雑化する。これら震源特性、伝播経路特性、地盤増幅特性は個別に評価することができ、観測される地震動はそれらの総合特性として表現することができる。

一般に、規模の大きい地震ほど強い地震波が震源から放射されることは周知である。また規模が大きい地震ほど地震断層も大きく、破壊の開始から停止までにかかる時間が長くなることも容易に理解される。このような前提で地震波のスペクトル特性を見ると、大きい地震で放射される地震波ほど長周期の成分を多く含むことが分かる。このような特徴を、変位振幅の周期特性として図ー2に示す [Aki(1967)、理論地震動研究会(1994)]。長周期(低周波数)での変位振幅は一定値となり(地震モーメントに対応)、地震の規模に関連する特徴的な周期(図中の破線)よりも短周期(高周波数)では周波数の-2乗で振幅が小さくなる。これが、震源から放射される地震波の平均的な周期特性(放射特性、方位特性を平均化し、非一様すべりを考えない)である。この特徴は、震源から放射される地震波が満たす普遍的なものであり震源スペクトルが有する相似

則である。また、周波数に対する-2乗の関係から、 ω^2 則(ω は角周波数)と呼ばれる。

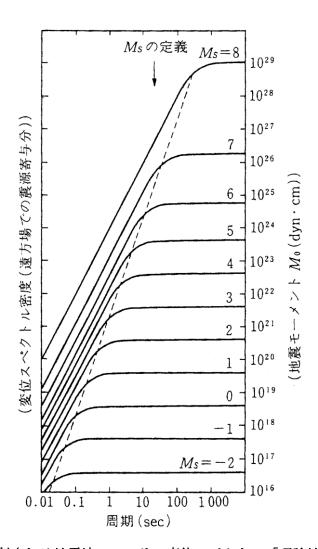


図-2 震源から放射される地震波のフーリエ変位スペクトル [理論地震動研究会(1994)]

図-3を模式的に示すと図-3のようになる。スペクトルが折れ曲がるコーナー周波数付近のスペクトル特性を誇張して直線的に描いている。また、図-2の横軸が周期、図-3は周波数であるため、同じ現象を示すグラフが左右対称になっている点に注意されたい。地震モーメント(変位振幅)とコーナー周波数には-3乗の関係がある。このため、小さい方の地震のコーナー周波数よりも高周波数では振幅が対数軸で2目盛違っているのに対して、大きい方の地震のコーナー周波数よりも低周波数では6目盛の差が生じており、対数で3倍の違いがある。実数で考えると、高周波数でN倍の違いは、低周波数では 13 倍の違いになる。このように、大きい地震と小さい地震の差は低周波数で顕著であり、全周波数で一定の差となるわけではない。これが、震源スペクトルの満たす 12 0つ時徴である。

ここで、大地震と小地震の違いについて考察する。大地震と小地震による断層破壊の違いは、図ー4に示すように、破壊面積(地震断層の大きさ)の違いとすべり量の違いである。このため、断層面上での平均的なすべり速度をほぼ一定($1\,\mathrm{m/s}$ 程度)と考えると、小地震に比べて大地震の方が時間をかけて大きくすべることになる。

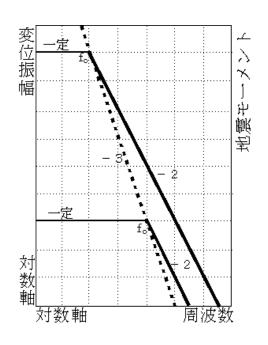


図-3 震源フーリエ変位スペクトルの相似則を模式的に表現したもの

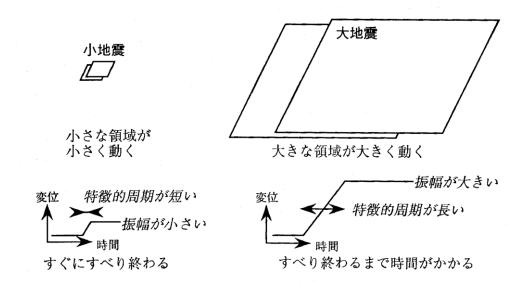


図-4 小地震と大地震の断層破壊の違い

地震の規模が小さければ地震断層も小さく、破壊の進行による方位特性や非一様すべりの影響をほとんど受けないと考えることができる。そのため、小地震ほど ω^{-2} 則に従ったスペクトルに従ったものが観測される。一方、地震の規模が大きく断層面が大きくなると、すべりの非一様性(アスペリティなど)の影響により、平均的には ω^{-2} 則を満たすが個々の記録はそれから逸脱したものが見られるようになる。

2. 経験的グリーン関数合成法 (Empirical Green's Function Method)

図-4に示すような小地震と同じ断層面において同じすべり方向の大地震が発生し、それが対象観測点で記録されたと想定する。このとき、想定大地震と小地震では観測点近傍の地盤構造による影響は同じと見なすことができる。また、対象観測点に至る伝播経路の特性もほぼ同じ、対象観測点に対する震源の放射特性もほぼ同じと仮定することができる。つまり、地震動に及ぼす影響を考えると、断層面上での破壊の大きさとその進行だけが大地震と小地震の違いとなる。

この性質を利用して小地観測記録から大地震動波形を合成する方法が提案されており、経験的グリーン関数合成法と呼ばれる。グリーン関数の物理的な意味は、「ある1点に力を作用させた時の別の1点での応答」である。この意味で、断層面積の小さい小地震の観測記録は、1点に作用した力(断層運動)に対する観測点の応答を経験的に(観測量として)表現したもの、つまり経験的グリーン関数として見なすことができる。

図-5に、経験的グリーン関数合成法による小地震記録の重ね合わせの基本概念を示す。大地震の地震モーメントと同じになる数だけ、小地震の観測記録を断層破壊の伝播と断層変位の蓄積による時間遅れに従って足し合わせてゆくことが基本となっている。断層面上の破壊伝播速度は、地震が起こる媒質のS波速度よりやや小さい程度の値が想定される。図-5に示した概念により、断層破壊過程、伝播経路の影響、地盤構造の影響の全てを反映し、図-3に示した相似則を満足して大地震動を合成することができる。足し合わせ個数の総数は想定大地震と小地震のモーメント比で決定される。地震モーメントは、断層破壊面の面積(断層長さ×断層幅)とすべり量の積に比例した量となる。したがって、図-5に示した断層走行方向、断層幅方向、すべり量方向それぞれの足し合わせ数は、想定大地震と小地震のモーメント比の3乗根に近い整数とされる。断層面上の重ね合わせにあたって、図-6に示すような、非一様すべりの概念を導入することも可能である。

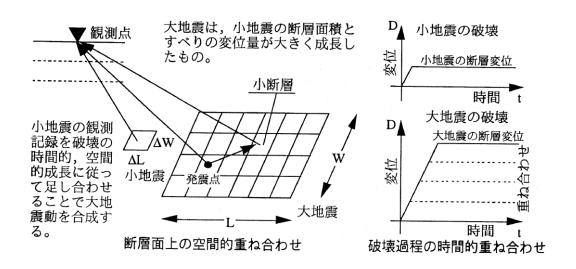


図-5 経験的グリーン関数合成法の概念

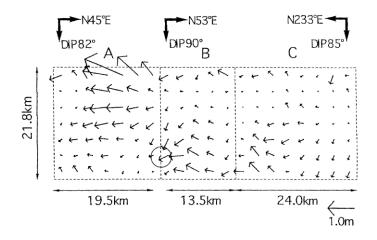


図-6 非一様すべりの例 [Sekiguchi el al. (1996)]

以上の合成法を数式で表現する。u(t)を小断層に起因する小地震記録,U(t)を想定大地震記録とする。小地震の震源と対象地点との震源距離を r_o ,断層を $M\times NW$ に分割し,すべりの足し合わせ数をNDとすると,経験的グリーン関数の合成は以下のようになる [Irikura(1986)]。(2)式は(1)式を分解したものである。また,(4)式は時間領域の(1)式を周波数領域で表現したものであり,結果は同じとなる。

$$U(t) = \sum_{m=1}^{NL} \sum_{n=1}^{NW} \frac{r_0}{r_{mn}} \cdot u(t - t_{mn})$$

$$+ \sum_{m=1}^{NL} \sum_{n=1}^{NW} \sum_{k=1}^{(ND-1)n'} \frac{r_0}{r_{mn}} \cdot \frac{1}{n'} \cdot u(t - t_{mn} - k \cdot \frac{\tau}{(ND-1)n'})$$

$$(1)$$

$$= \sum_{m=1}^{NL} \sum_{n=1}^{NW} \frac{r_0}{r_{mn}} \left[u(t - t_{mn}) + \sum_{k=1}^{(ND-1)n'} \frac{1}{n'} \cdot u(t - t_{mn} - k \cdot \frac{\tau}{(ND-1)n'}) \right]$$
 (2)

$$t_{mn} = \frac{(r_{mn} - r_0)}{V_s} + \frac{\xi_{mn}}{V_R} \tag{3}$$

$$U(\omega) = \sum_{m=1}^{NL} \sum_{n=1}^{NW} \frac{1}{r_{mn}} \left(e^{-i\omega t_{mn}} + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{(ND-1)n'} e^{-i\omega \left[t_{mn} + \frac{(k-1)\tau}{(ND-1)n'} \right]} \right) \cdot U_{mn}(\omega)$$
(4)

式中、 τ はすべりの立ち上がり時間であり、小断層上がすべり始めてからすべり終わるまでの継続時間を表している。r は小断層の中心から対象地点までの震源距離、 V_S は媒質(地殻)のS波速度である。 ξ は小断層中心と破壊開始点(震源)との距離であり、 V_R は断層面上における破壊の伝播速度である。したがって、 t_m は小断層で生じた破壊が対象地点で観測される際の時間遅れを表していることになる。

n'はすべりの足し合わせの時間間隔を更に細かくするためのパラメターで、すべり量の足し合わせのみ図-5で簡単に示したものより複雑になっている。その概念を図-7に追加している。

図-5では振幅1で ND 個実施している足し合わせを、振幅1の1個と振幅(1/n')の $(ND-1)\times n'$ 個で実施していることになる。立ち上がり時間(すべり継続時間)は変化せず、その分足し合わせの時間間隔が短くなっていることが特徴である。このことによって、足し合わせ時間間隔に対応した周期が卓越する現象を防ぐことができ、後述するように大地震と小地震の周波数特性を補正する作用を担っている。なお、図-7に示したすべり量の時間変化を微分してすべり速度として表すと、ひとつひとつの小地震によるすべり(観測点では結果として観測される波形)を足し合わせるタイミングとその振幅変化となる(図-8)。これが、式(2)の大括弧の中の足し合わせに相当する。

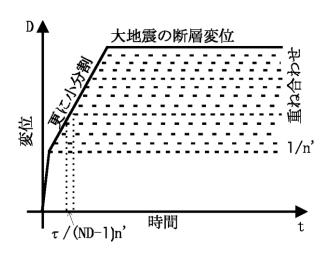


図-7 経験的グリーン関数合成法によるすべり合成の概念

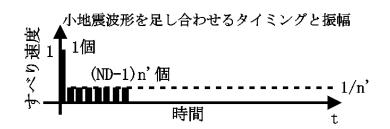


図-8 すべりに応じて波形を足し合わせるタイミング

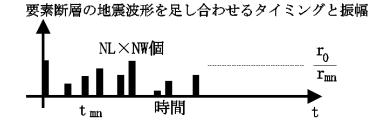


図-9 断層面上の破壊進行に応じて波形を足し合わせるタイミング

図-8と同様に、断層面上の破壊伝播に応じて波形を足し合わせるタイミングと振幅を図示すると図-9のようになる。これが、式(2)における2重合成の部分に相当し、その時間遅れが式(3)に示される t_m になる。

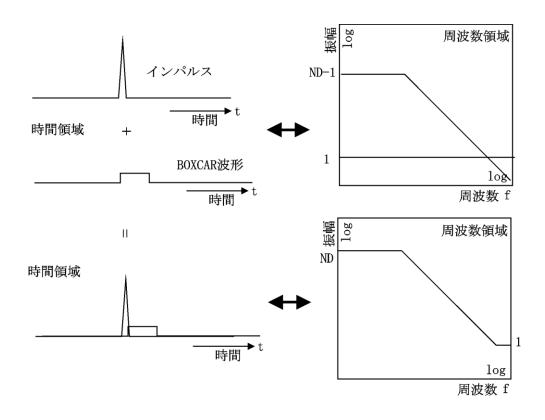


図-10 Irikura (1986) によるすべりの合成を時間領域と周波数領域で見ると

経験的グリーン関数法による計算では、(3)式を評価するための断層面上の小断層中心位置とサイトとの幾何的な位置関係の設定が重要となる。図-11に示すような断層を想定し、断層基準点位置を原点と仮定すると、小断層(i,j)の中心の座標(xf,yf,zf)は、

$$xf = rl * \sin(strike) + rw * \cos(dip) * \sin(strike + 90)$$

$$yf = rl * \cos(strike) + rw * \cos(dip) * \cos(strike + 90)$$

$$zf = tdep + rw * \sin(dip)$$
(5)

$$rl = (i - 0.5) * DL$$

 $rw = (j - 0.5) * DW$
(6)

と導かれる。これらを用いて(1)~(3)式を評価すれば良い。

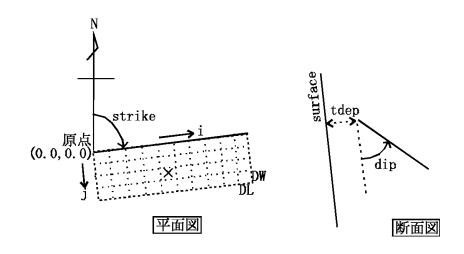


図-11 断層面の幾何的位置関係

5. 経験的グリーン関数合成法を用いる際の注意事項

経験的グリーン関数合成法は簡便に強震動が合成できる便利な手法であるが、利用にあたって は幾つかの注意事項があるので、以下に述べる。

1) 記録の精度を吟味する

合成結果の精度は、要素地震として用いる観測記録の精度に依存する。波形およびスペクトルを良く検討し、できるだけ高精度の記録を用いることが望ましい。それが適わない場合は、記録の適用限界をわきまえて用いる必要がある。特に、加速度記録は長周期(低周波)成分がノイズの影響を受けているものが多いので、ローカット・フィルター処理を施して用いることが望ましい。図-12 に見られる記録では、周期2秒以上(周波数 0.5Hz 以下)にノイズの影響が見られる。

2) 震源メカニズムのあまりに違うものを使わない

経験的グリーン関数で用いる要素地震は、対象地震の震源特性を反映したものである必要がある。そのため、震源メカニズム(インターネットで公開されているモーメント・テンソル解など)を調査し、対象地震と同様のメカニズムを持つものを用いるべきである。震源メカニズムの大きく異なるものは、特に長周期帯域で Radiation pattern による影響が異なることが危惧される。

ただし、後述するように、長周期帯域を理論的手法で置き換えたハイブリッド法により Radiation pattern の違いを補償できれば、その限りではない。

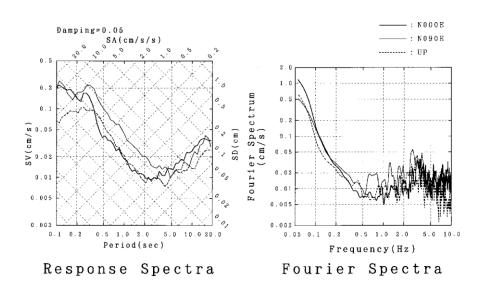


図-12 長周期(低周波)成分がノイズの影響を受けた記録

3) 非線形応答

経験的グリーン関数法では、小地震と大地震で地盤の応答が等しいと仮定している。このことは、地震動の大きさによらず地盤応答特性が同じ、つまり線形応答を仮定していることになる。一般に、大地震動を受けた地盤は非線形特性を示すので、この影響を何らかの形で取り入れる必要がある。よく用いられる方法は、経験的グリーン関数法で合成した地表面地震動を線形の地盤応答を仮定して非線形挙動を考慮しなくても良いほど硬質な深層まで戻し、非線形の地盤応答を考慮して再び地表面に上げるものである(図-13)。

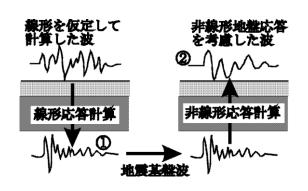


図-13 非線形応答の補正法

4) Nの設定

断層分割数(重ね合わせ数)は、対象とする大地震と要素小地震の地震モーメント比から設定する。対象とする大地震が既に発生したもので観測記録が得られている場合、公表されている地震モーメント値をそのまま使うだけではなく、図-14に示すように大地震と小地震のスペクトル

比を取り、実際の重ね合わせ数を検討することが望ましい。図-14では複数の観測点における大地震と小地震のスペクトル比を平均し、それに対応する理論スペクトル比(をフィッティングすることにより、両地震のモーメント比および応力パラメター(応力降下量)比を推定している。応力パラメターの具体的なイメージは講座Xで詳しく述べる。応力パラメターの補正係数をCとすると、低周波数のスペクトル比が $C\cdot N$ に対応し、高周波数のスペクトル比が $C\cdot N$ に対応することになる。この例ではC=1. 48 で、大地震の方が大きな応力パラメターとなるような合成が必要であることが示されている。このようにして重ね合わせパラメターを設計することにより、対象地震記録に対応した合成が容易となる。

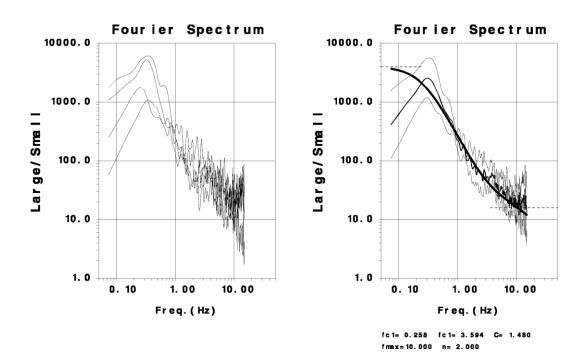


図-14 重ね合わせパラメターの設計

また、Irikura (1986)の重ね合わせでは、Nが10程度よりも大きい場合に、大地震と小地震のコーナー周波数の中間周波数帯が小さくなる(落ち込む)現象が見られることがある。あまり大きな重ね合わせ数を用いる場合には、中間規模の地震を一旦合成し、それを用いて大地震を合成する2段階合成法を用いることが望ましい。この落ち込みを軽減する合成法[入倉・他(1997)]も提案されている。

逆に N を小さくし過ぎ、小断層間を破壊が伝播する時間が立ち上がり時間に比べて大き過ぎる設定では、計算波形が連続せずに串団子のような包絡形状となる場合がある。そのような状況にならないように、適切な N を設定することが望ましい。

Nを断層長さ方向 (NL), 断層幅方向 (NW), すべり量方向 (ND) でそれぞれ設定する場合, 横長の断層などでは必ずしも NL=NW=ND とならない場合がある。その際, 断層面積の重ね合わせ数とすべり量の重ね合わせが整合している必要があるため,

$$ND = \sqrt{NL \times NW} \tag{7}$$

の関係を満たしている必要がある。

5) n'の設定

n' は、前述のように ω^{-2} 則に従う重ね合わせをコントロールするパラメターである。再分割をおこなった重ね合わせの時間間隔を波形のサンプリング間隔(Δt)程度にすることが良いので、立ち上がり時間を τ として、

$$\Delta t = \frac{\tau}{(ND - 1) \times n'} \tag{8}$$

となるように設定することが望ましい(こうすると,再分割した部分の重ね合わせが BOXCAR になる)。また,分割数 ND を大きくした場合,n'が1に近い値となる場合がある。この場合は,Irkura(1986)のモデルを外れ,高周波数が過大評価される可能性があるので,注意が必要である。

8. 参考文献

Aki, K.: Scaling Law of Seismic Spectrum, *J. Geophys. Res.*, **72**, pp. 1217-1231, 1967. 理論地震動研究会編著:地震動ーその合成と波形処理ー, 鹿島出版会, 1994.

Irikura, K.: Prediction of strong acceleration motion using empirical Green's function, 7th Jpn. Earthq. Eng. Symp., pp. 151-156, 1986.

入倉孝次郎,香川敬生,関口春子:経験的グリーン関数を用いた強震動予測方法の改良,*日本地 震学会講演予稿集*,1997年度秋季大会,B25,1997.

Sekiguchi, H., K. Irikura, T. Iwata, Y. Kakehi, and M. Hoshiba: Minute Locating of Fault Planes and Source Process of the 1995 Hyogo-ken Nanbu(Kobe), Japan Earthquake from the Waveform Inversion of Strong Ground Motion, *J. Physics of the Earth*, 44, pp. 473-488, 1996.

付録A エクセル 2007 でのマクロの利用法

1) はじめに

本講座の付録として配布するエクセル・ファイルにはマクロが含まれている。初期状態では安全のためマクロが利用できないので、以下の解説に沿ってマクロが安全に利用できるように設定する必要がある。

- 1) 配布するファイルは、Microsoft 社の表計算ソフトである"Microsoft Excel"で動作する(2002, 2003 および 2007 で確認)。 "Microsoft Excel" が正常にインストールされている環境が必須である。
- 2) 計算には、"Microsoft Excel"のマクロ機能を用いている。そのためマクロが安全に使える環境が必要となる。Excel 2002、2003でマクロを含むファイルの使用法は既に講座 I の付録Aで解説している。ここでは、Excel 2007で安全に利用する方法について、次項以下に示す。
- 3) ファイルのシートやセルには特にプロテクトを施していない。そのため、オリジナルの設定を保存しておく上でもファイルのオリジナルは別途保存しておき、コピーしたファイルで作業をすることが望ましい。
- 4) 以下の解説は、"Microsoft Excel"の使用にある程度習熟していることを前提としている。
- 5) 用いた手法の詳細については別途解説するので、それを理解されていることを前提とする。 (* Excel は Microsoft 社の登録商標である。)

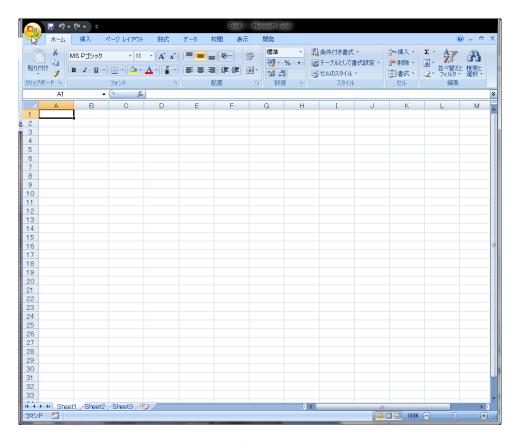


図-1 オフィスを立ち上げた状態と左上の「Office ボタン」

2) エクセル 2007 でマクロを含むファイルを利用する準備

まずエクセルを立ち上げ、図-1のように左上の「Office ボタン」を左クリックしてメニューを表示する。次に、メニューの下枠にある「Excel のオプション」を左クリックする(図-2)。



図-2 「Office ボタン」で表示されるメニュー

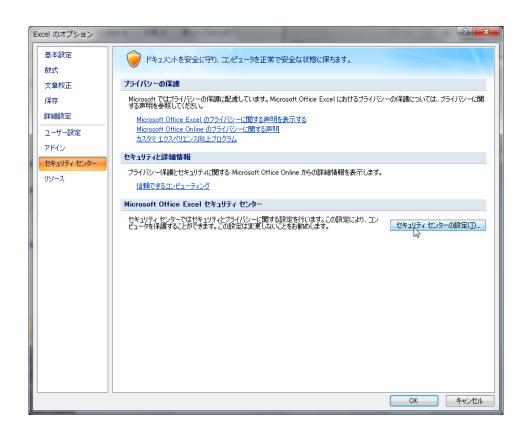


図-3 「Excel のオプション」で表示されるメニュー

表示されたウィンドウ左側のメニューから「セキュリティ センター」を選択すると、図-3の 状態になる。ここで、右下の「セキュリティ センターの設定」を左クリックする。次に表示され たウィンドウ左側のメニューから「マクロの設定」を選択すると、図-4の状態になる。ここで、上段の「マクロの設定」で上から2番目の「警告を表示してすべてのマクロを無効にする」を選択する。下枠の「OK」を左クリックして設定を保存する。その上で、エクセルを終了する。

初期設定ではマクロを含むファイルが無警告で無効にされていたが、この変更により、マクロが自動的に無効になる点は変わらないものの、マクロが含まれていれば警告が表示されるようになる。その意味で、この段階でのセキュリティ・レベルは変わらない。

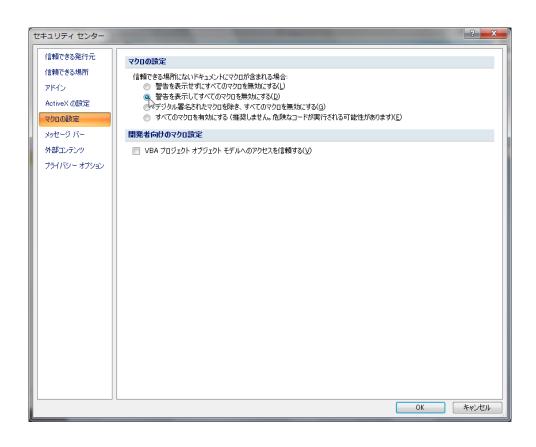


図-4 「セキュリティ センターの設定」で表示されるメニュー

3) エクセル 2007 でマクロを含むファイルを開いた場合

2)の設定を終えた段階で、マクロを含むファイル "shake.xls" などをオープンすると、図-5のように「セキュリティの警告」を示すバーが表示される。この段階で、ファイルに含まれるマクロは無効化されている。ここで、セキュリティ警告バーにある「オプション」を左クリックすると図-6に示すウィンドウが現れるので、「このコンテンツを有効にする」を選択して下枠の「OK」を左クリックする。この瞬間からマクロが有効になり、自動実行マクロであれば動作を開始する。

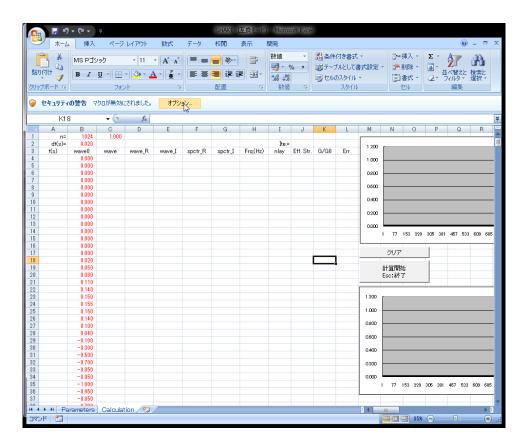


図-5 マクロを含むファイルを開いた場合のセキュリティ警告バー

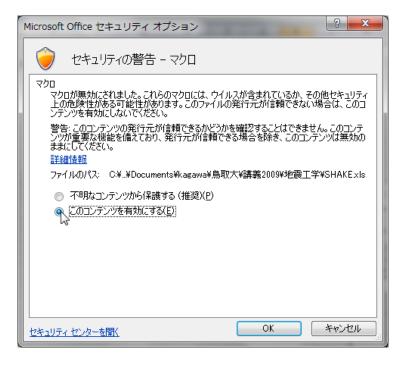


図-6 マクロの有効化

なお、このマクロを有効にする作業は、ファイルを開く毎に実施する必要がある。マクロの有効化を自己責任でおこなうことが初期設定との違いとなっており、信頼のおけないファイルにつ

いては,十分な配慮が必要である。

4)マクロの編集

計算の中身を更に知りたい場合には、"Visual Basic Editor"を用いてマクロ・プログラムを閲覧・編集することができる。Visual Basic と VBA に習熟している場合は、より効率の良いプログラム化などに挑戦して頂きたい。ここでは、マクロを編集するための手続きについて紹介する。

まず、左上の「Office ボタン」を左クリックしてメニューを表示し、メニューの下枠にある「Excel のオプション」を左クリックする(図-1、2と同様)。

表示されたウィンドウ左側のメニューから「基本設定」を選択すると、図-7の状態になる。ここで、上段の「Excelの使用に関する基本オプション」で上から3番目の「[開発] タブをリボンに表示する」をチェックする。下枠の「OK」を左クリックして設定を保存する。すると、リボンに「開発] タブが表示されるようになる。

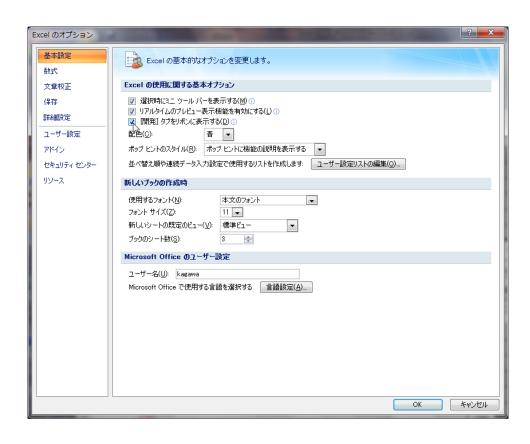


図-7 「Excel のオプション」の「基本設定」で表示されるメニュー

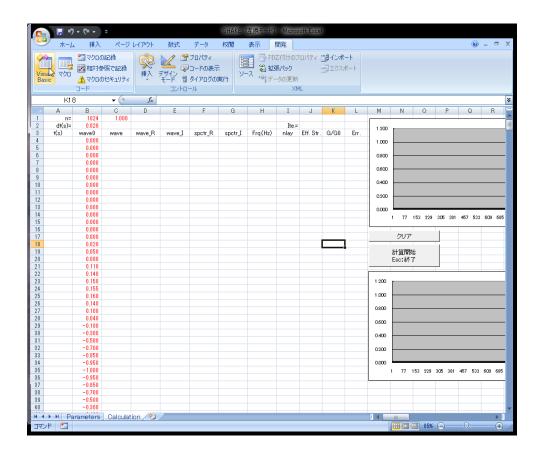


図-8 [開発] タブを選択した状態

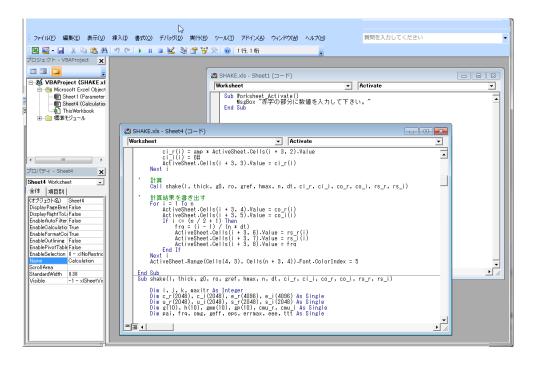


図-9 Visual Basic Editor にコードが表示された状態

リボンの [開発] タブを選択すると、図-8に示すメニューが現れる。そこで「Visual Basic」ボタンを左クリックすると、図-9に示す様にマクロを編集できるようになる。マクロの開発法の概要については他の書籍に譲る。

なお, Excel 2010 のユーザーインターフェイスも基本的に Excel 2007 と同様であるが, マクロの許可についてはより簡略化されているようである。これについては, 以後の講座で補足したい。

付録B 経験的グリーン関数の合成(irikura1986.xls)

1) 内容

表計算ソフト(Excel)の機能を用いて、経験的グリーン関数法 [Irikura(1986)]の内容を視覚的に理解するためのテンプレート・ファイルである。なお、計算は経験的グリーン関数法の実際の計算内容に沿って、ステップ毎に実施される。(解説図は Excel 2003 で実行した際のもの。)

2) "Geometry" シート

正常にファイルがオープンされると、"Geometry"、"Wave"、"Shift"、"ND_ndd"、"ND_NW"の5枚のシートが現れ、初期設定では "Geometry" シートが表示される。計算は、これらのシートを順に実行してゆくことになる。最初および他のシートから "Geometry" シートに移動した場合、赤色の部分に入力を促すメッセージが表示されるが、 $\lceil OK
floor$ をクリックすれば図-1の状態になる。

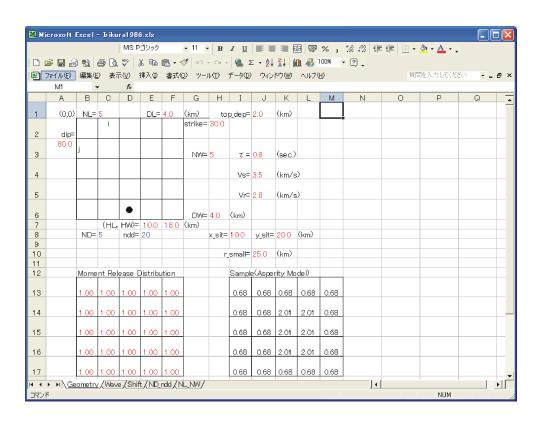


図-1 "Geomatry"シートが表示された状態

"Geometry"シートでは、計算に必要な断層面および観測点の幾何的な位置関係を設定する。シート中、赤字で示したものが入力項目であり、青地の数値は入力値に応じて自動的に計算される。この時の注意事項を以下に示す。

- (1) 赤字以外のセル(特に青地のセルには数式が入っている)は不用意に変更しないようにする。
- (2) 赤字のセルの位置はマクロ・プログラムで参照しているため, [A1] から [K10] までのセル 位置が変化するようなセル・行・列の挿入・削除をおこなわない。

(3) 「Moment Release Distribution」は [B13] のセルを先頭にさえしておれば、NL・NWの個数に応じて範囲を広げた設定も可能である。(例えば、NL=12、NW=8の場合、[B13] から [M20] の範囲を用いて設定すれば良い。)

断層の位置および走向(strike)・傾斜(dip)は以下の条件に基づいて設定する。

- (1) 断層の上端の片側の一端の地表投影を原点とする。
- (2) 走向 (strike) は、北から時計回りの角度 (degree) で表現する。
- (3) 傾斜(dip)は、走向方向に右ねじを締める方向に測り、水平を0度、鉛直を90度とする。
- (4) 断層面上の位置は、原点に近い断層端から、走向方向・傾斜方向を正の方向とする。

NL, DL には断層走向方向の分割数と小断層の長さを、NW, DW には断層傾斜方向の分割数と小断層の幅を与える。なお、断層上端の深さを top_{dep} に設定する。破壊開始点位置は、断層面上の走向方向および傾斜方向の座標(HL, HW)で表現する。 τ ははライズ・タイム(立ち上がり時間)を、Vs には媒質のS 波速度を、Vr には破壊伝播速度を与える。

観測点位置(x_sit, y_sit)は断層端の原点からの位置でする。要素地震記録(経験的グリーン関数)が得られた小地震とサイトとの震源距離を,r_smallに与える。

3) "Wave" シート

他のシートから "Wave" シートに移動した場合も赤色の部分に入力を促すメッセージが表示されるが、「OK」をクリックすれば図-2の状態になる。

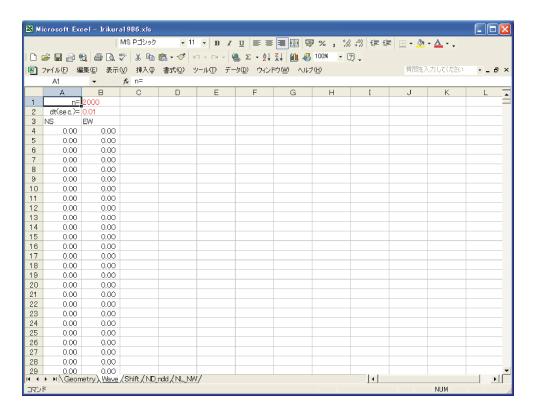


図-2 "Wave"シートが表示された状態

"Wave"シートには、計算に用いる小地震観測波形(経験的グリーン関数)をストアしておく。ただし、実際の計算に用いるのは、赤字で示したもサンプル数(n)と時間刻み(dt)のみであり、必須の入力項目はこのふたつである。波形データは、後述する"ND_ndd"シートにコピー&ペーストして計算に用いる。なお、赤字のセルの位置はマクロ・プログラムで参照しているため、[B1] および [B2] のセル位置が変化するようなセル・行・列の挿入・削除をおこなわないように。これで、計算の準備が整ったことになる。

4) "Shift" シート

"Shift" シートには入力項目が無いため、他のシートから "Shift" シートに移動した場合、メッセージが表示されることなく図-3の状態になる。

"Shift"シートでは、"ND_ndd"シート (断層すべり進行の合成)、"NL_NW"シート (断層面破壊伝播の合成)で用いる、要素地震波形の時間ずれ量および振幅の補正値をマクロによって自動計算する。マクロによる計算は、以下のふたつのボタンによって実行される。

[クリア]: これからの作業に必要な領域をクリアする。新たな計算は、以前の計算領域を一旦クリアしてから実施することが望ましい。

[シフト量と振幅の計算]: "Geometry" および "Wave" シートの設定値に基づき、断層すべり進行の合成および断層面破壊伝播の合成に必要な、要素地震波形の時間ずれ量および振幅の補正値を計算する。

マクロによる計算結果を図-4に示す。これを縮小表示したものが図-5であり、全体の様子を見ることができる。

 $1\sim3$ 行に"ND_ndd"シートで用いる「断層すべり進行の合成」に必要な時間ずれ量および振幅補正値が計算される。最初は振幅1でずれ量ゼロであり,それに続いて振幅1/nddでズレ量をdt ずつ増やしたものが,(ND-1)×ndd 個与えられる(本文の図-8に相当)。

 $5 \sim 19$ 行には "NL_NW" シートで用いる「断層面破壊伝播の合成」に必要な時間ずれ量および振幅補正値が要素断層毎に計算される(本文の図-9 に相当)。このうち $7 \sim 17$ 行は中間値であるが、その意味するところは以下の通りである。計算式は、"Geometry" シートの下部に示している。

RL, RW: 要素断層重心位置の断層面上における走向方向および傾斜方向の座標

RH:破壊開始点(HL, HW)から要素断層重心位置(RL, RW)までの距離

TH:破壊開始点から要素断層重心位置までの破壊伝播による時間遅れ

x_flt, y_flt, z_flt:原点に対する要素断層重心位置の座標

RS:要素断層重心位置 (x_flt, y_flt, z_flt) からサイト (x_sit, y_sit, 0) までの距離

TS:要素断層重心位置からサイトまでの波動伝播による時間遅れ

T: THとTSの両方の効果による時間遅れ

T0:小地震とサイト間の距離 (r_small) を波動が伝播することによる時間遅れ

なお、計算に必要な値が正常に入力されていない場合、図-6に示すエラー・メッセージが表

示されるので、"Geomatry" あるいは"Wave"シートの入力値を確認する。

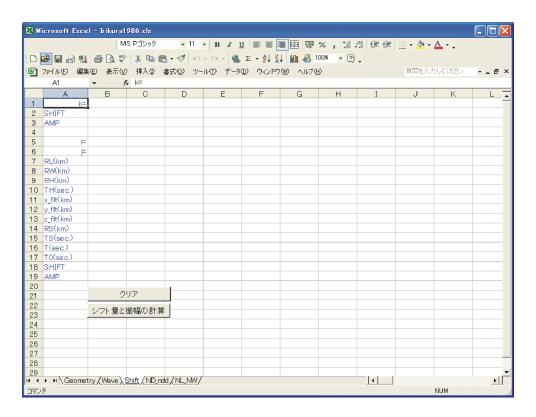


図-3 "Shift" シートが表示された状態

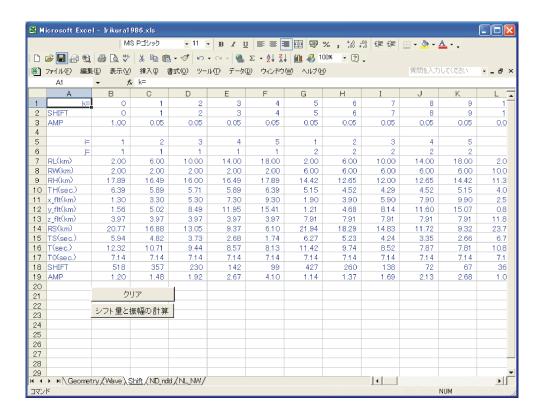


図-4 "Shift"シートで計算が終了した状態

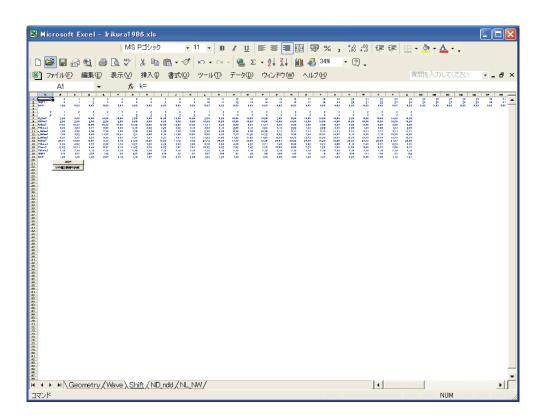


図-5 図-4を縮小表示した状態

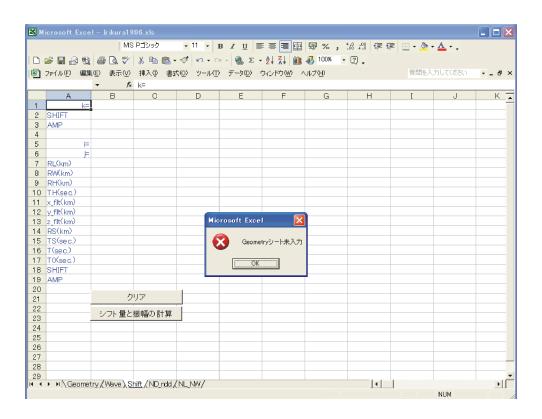


図-6 "Shift" シートのエラー・メッセージ

5) "ND_ndd" シート

他のシートから"ND_ndd"シートに移動した場合、赤色の部分に入力を促すメッセージが表示されるが、ここで「OK」をクリックすれば図-7の状態になる。ふたつの波形図は、上が A 列の小地震観測波形(経験的グリーン関数)、下が B 列の合成波形を示している。各列に波形データが入力されていなければ、波形図にはゼロ波形が表示されている。(図-7では A 列の小地震観測波形(経験的グリーン関数)のみ表示されている。)

"ND_ndd"シートでは、小地震のすべり量を大地震のすべり量に補正するための合成をマクロによって実施する。このとき、A 列には小地震観測波形(経験的グリーン関数)を、"Wave"シートからコピーしておく必要がある。マクロによる計算は、以下のふたつのボタンによって実行される。

[クリア]: これからの作業に必要な領域をクリアする。新たな計算は、以前の計算領域を一旦クリアしてから実施することが望ましい。

[すべりの合成]: "Shift" シートの計算値に基づき、断層すべり進行の合成を実施する。

マクロによる計算結果を図-8に示す。これを縮小表示したものが図-9であり、全体の様子を見ることができる。

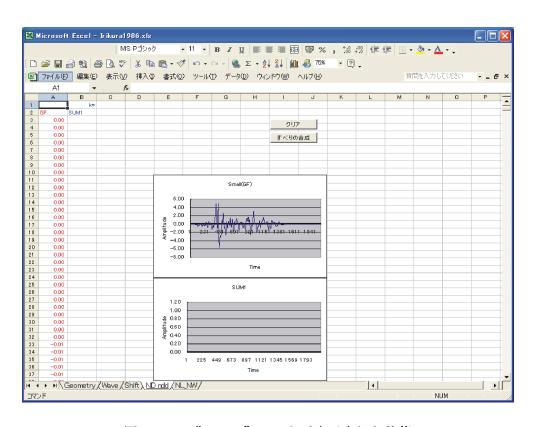


図-7 "ND_ndd" シートが表示された状態

図-9の状態で、C列からL列までの波形を重ね書きしたものを図-10に示す。C列の振幅が1に対して、他の振幅が1/nddとなるため、C列の波形が強調されている。次に、M列からAP列までの波形の重ね書きを追加したものを図-11に示す。この場合は振幅がすべて1/nddであり、時

間ずれも30個分と大きいため、波形のずれも明瞭に確認することができる。

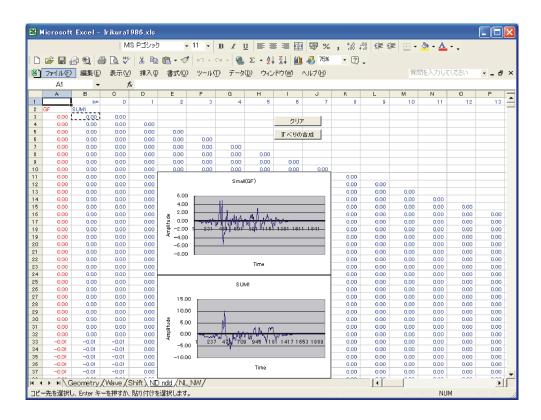


図-8 "ND_ndd"シートで計算が終了した状態

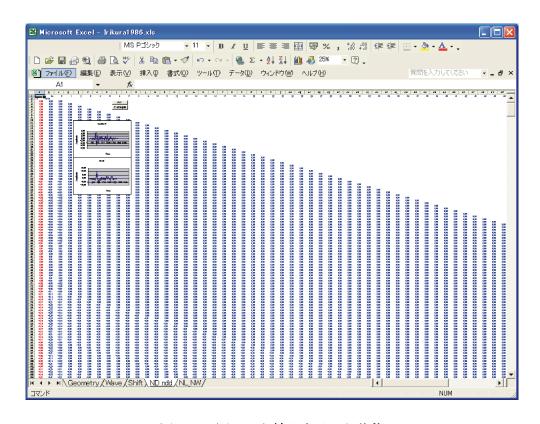


図-9 図-8を縮小表示した状態

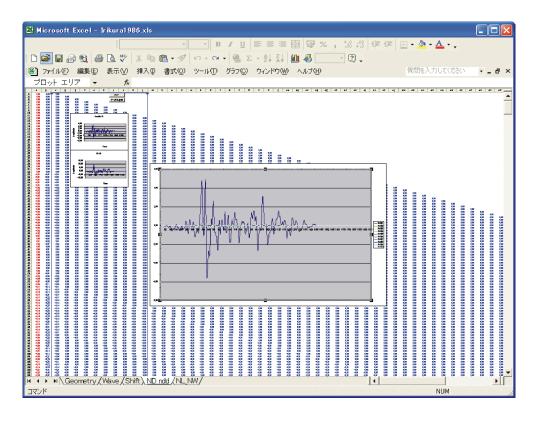


図-10 図-9のC~L列を波形表示した状態

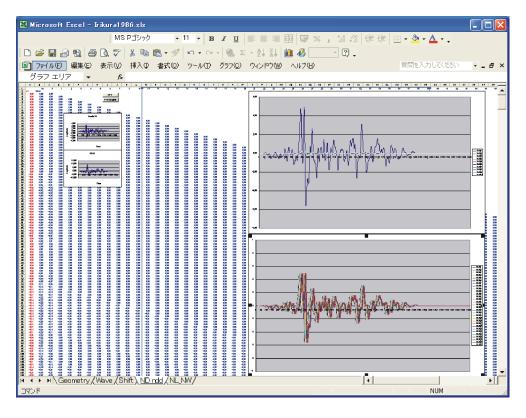


図-11 図-10 に加えて、更に M~AP 列を波形表示した状態

なお、計算に必要な値が正常に入力されていない場合、図-12 に示すエラー・メッセージが表示されるので、"shift"シートの正常な実行完了を確認する。

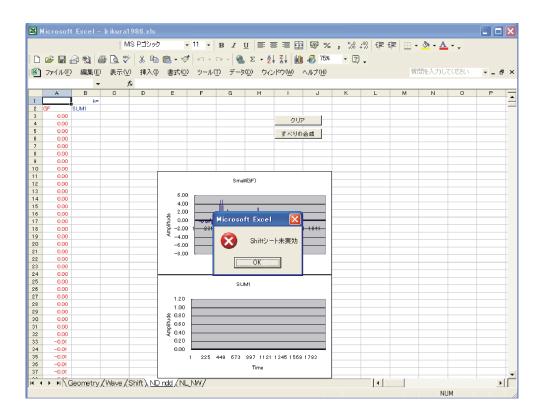


図-12 "ND_ndd"シートのエラー・メッセージ

6) "NL NW" シート

"NL_NW"シートには入力項目が無いため、他のシートから"NL_NW"シートに移動した場合、メッセージが表示されることなく図-13の状態になる。表示される波形図はB列に相当する大地震の合成波形である。ただし、この段階では計算が実行されていないので、波形図にはゼロ波形が表示されている。

"NL_NW"シートでは、断層面上の破壊伝播によって小地震の断層面積が大地震の断層面積へと大きくするための合成をマクロによって実施する。マクロによる計算は、以下のふたつのボタンによって実行される。

[クリア]: これからの作業に必要な領域をクリアする。新たな計算は、以前の計算領域を一旦クリアしてから実施することが望ましい。

[断層破壊進行の合成]: "Shift" シートの計算値に基づき, "ND_ndd" シートの合成波形を用いて, 断層面の破壊伝播による合成を実施する。

マクロによる計算結果を図-17に示す。これを縮小表示したものが図-18であり、全体の様子を見ることができる。

図-18の状態で、K列からQ列までの波形を重ね書きしたものを図-19に示す。各要素断層からの寄与が、振幅補正および時間ずれをともなって足し合わされることを明瞭に確認することが

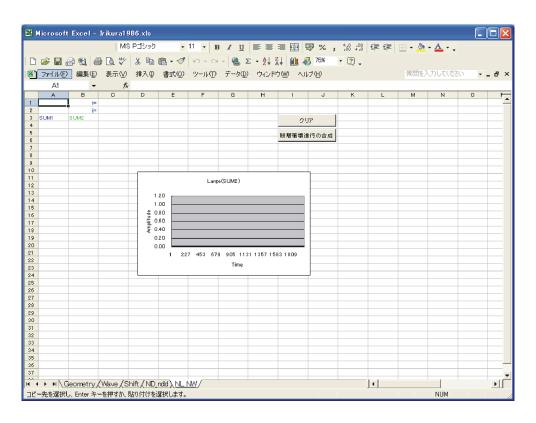


図-13 "NL_NW"シートが表示された状態

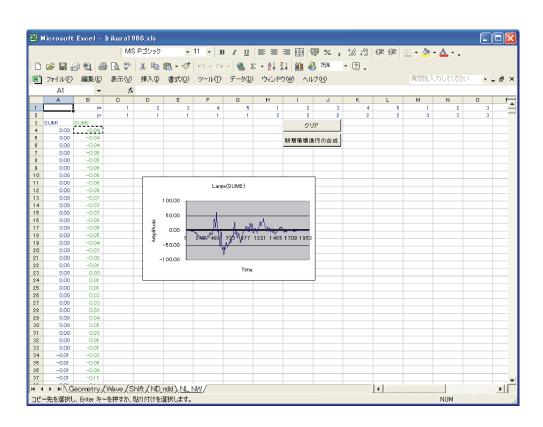


図-14 "NL_NW"シートで計算が終了した状態

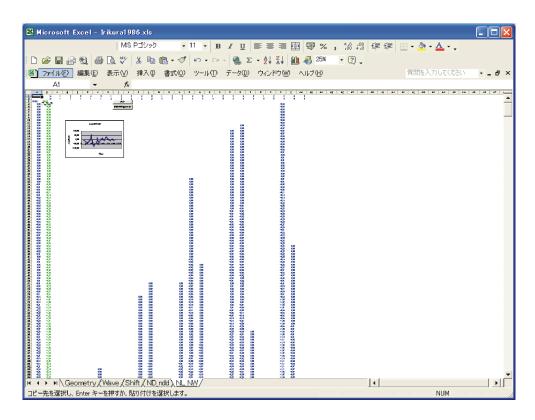


図-15 図-14を縮小表示した状態

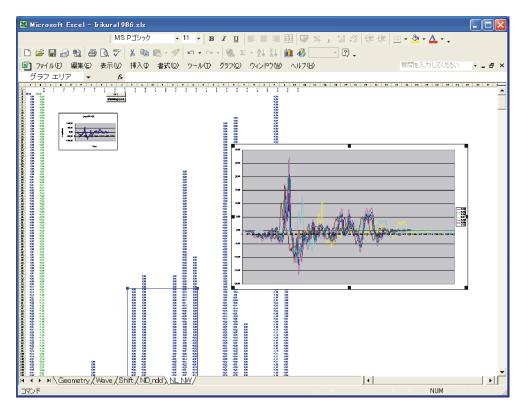


図-16 図-15の K~Q 列を波形表示した状態

なお、計算に必要な値が正常に入力されていない場合、図-20 に示すエラー・メッセージが表示されるので、"ND_ndd" シートの正常な実行完了を確認する。

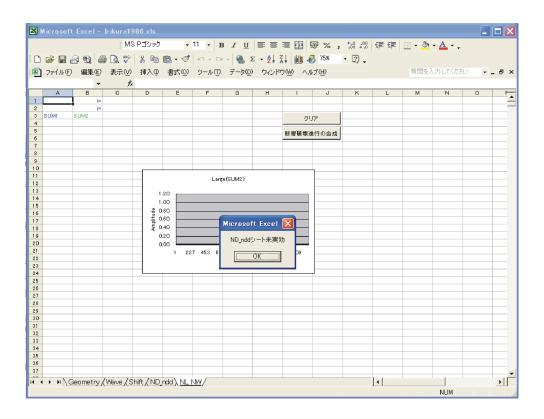


図-17 "NL_NW" シートのエラー・メッセージ