

## はじめに

構造物の振動を解析(動的解析)する場合、通常、構造物は、質量が離散した多自由度系にモデル化される。これらの質点は、相互に力を及ぼしあって複雑な振動をする。荷重と変位が比例する場合を線形振動、そうでない場合を非線形振動という。

耐震設計において、それに直接たずさわる人が“3次元非線形動的解析プログラム”を用いることは、すでに一般的になっている。このような実務にたずさわる人の多くが悩んでいることは

- ①幾つかの本を読んで、1自由度系の線形振動を理解できても、多自由度系のモード解析に対して具体的な概念を把握できないために、「結局、自分は振動を理解していない」と感じている。そして、動的解析で最初に行われる、多自由度系の振動特性を調べるための固有値解析の結果を適正に評価することができない。また、非線形動的解析の場合、減衰力の取り扱い方によって解析結果に大きな差が出る場合があるが、その理由がわからない、
- ②そのようなプログラムでは多くの技術用語が用いられている。しかし、それらを整理して解説した本がないために、その意味がよくわからない、
- ③振動学を理解できないのは、自分の数学力の不足が最大の原因であることはわかっている。しかし、振動学向きにコンパクトにまとめられた数学の本がないために、必要な数学力を向上させることがなかなかできない。

ある理工学の理論を理解するためには、まず、その理論を構成する個々の事柄の概念を把握することが重要であり、さらに厳密に理解するためには、数学的手法が必要である。この講座の目的は、“振動学について勉強したにもかかわらず振動について具体的な概念を把握できないでいる人達”および“実務で動的解析を行っているが、解析結果を十分に評価できない人達”のために、“振動学、特にその概念”と“それに必要な数学”をやさしくそして深く理解させることである。特に、モード解析と数学については、わかりやすくかつ具体的にそれを理解させるかに工夫をこらした。

実務のための振動学は、“基礎理論”と“耐震設計に応用するためのテクニカルな部分”に分けることができる。この講座では、テクニカルな部分は紹介するにとどめ、主に基礎理論について説明する。なぜならば、基礎理論をしっかりと理解できれば、テクニカルな部分を理解することは容易であり、また、両者について同等に記述した場合は

混同する可能性があるからである。

この講座の記述は、①簡潔でやさしく、物理的あるいは幾何学的に具体的である、②用語の定義があいまいであると理解の妨げとなるので、その定義を明確にし、1つの事柄に対して、最も適当な用語を1つだけ用いる、③数学上で厳密性を維持するとともに、数式の誘導はできるだけいていねいに示す、④理解しやすいように実務的な例題を示す、ように努める。

第1部では、この講座で振動を学ぶための“基本的事項”を確認する。第2部では“1自由度系の線形解析”を簡潔に説明する。

モード解析が、振動学で最も肝心な部分である。この理論がわかりにくいのは、“数学的ではなはだ抽象的である”、“解析の名称であるモードの定義が、広い意味で用いられているので、その名称に惑わされてしまう”および“なじみの薄い用語が多く用いられ、しかも用語の定義が統一されていない場合が少なくない”などが挙げられる。

したがって、モード解析について最大の紙面を割いて、第3部で説明する。第3-1部では、“行列を用いないでモード解析の概念とその技術用語の意味”について、単純な構造モデルを用いて、物理的あるいは幾何学的な視点から、具体的にやさしく説明する。第3-2部では、一般性のある多自由度系の振動を見通しよく理解するために必要な“行列”を説明する。第3-3部では、単純な構造モデルを用いて、“剛性、減衰および質量マトリックスの概念”、“行列を用いたモード解析”および“減衰力の考え方と問題点”を説明する。第3-4部では、“一般性のある構造モデルである骨組系のモード解析”を説明するとともに、“実例”を解析することによって、モード解析について具体的にかつ深く理解する。

耐震設計において、大地震に対する非線形解析が重要となっている。非線形解析において、基礎理論とよべるのは数値計算くらいで、他のほとんどは耐震設計のテクニカルな部分である。第4部では、主に“非線形動的解析における数値解析”について説明する。

振動学のように周期的関数を扱う学問では、複素数は極めて有効である。しかし、その概念を納得できる程度に認識することはなかなか難しい。そのために、第4部までは複素数を用いないで解説した。第5部では、複素数の概念をわかりやすく説明した上で、“複素数の振動学への応用”を説明する。

地震によって生じる地盤の加速度は、フーリエ・スペクトルによって評価することが

できる。しかし、これを正確に理解することは意外と難しい。たとえば、加速度の単位が  $m/s^2$  に対して、そのフーリエ振幅がなぜ  $m/s$  であるのか。第 6 部では、フーリエ・スペクトルを正確に理解するために、①周期関数のフーリエ係数、②非周期関数のフーリエ変換、③離散データのフーリエ係数、そして④離散データのフーリエ変換、と段階を追って説明する。第 7 部では、モード解析を数学的に明快に説明する。

著者である竹名、亀岡および温は、それぞれ土木工学、数学および建築工学を学び、それぞれ橋梁設計、動的解析を含む構造解析および建築の耐震設計の実務に従事してきた。著者は、対等なパートナーとして、この講座を著述する。ただし、一貫した考え方で著述するために、竹名が素案を作成し、亀岡および温がそれについて批判し、それに基づいて竹名が書き直すという作業を繰り返すことによって、本書は制作された。

## 使用単位

この講座では、国際単位の MKSA 単位系を用いる。すなわち、長さ、質量および時間は、それぞれ  $m$ 、 $kg$  および  $s$  を基本単位とする。したがって、力は  $N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$ 、振動数は  $Hz = s^{-1}$  である。

## 推奨する参考書

一つの参考書だけで、万人が振動を理解することはありえない。なぜならば、各自の知りたいことあるいはわからないことは、それぞれ異なるからである。著者の経験から振動に関する有効な参考書を挙げる。

振動のごく基本に関する入門書は、物理学の本が良い。たとえば、『有山正孝, (1996), “振動・波動”, 裳華房』や『寺沢徳雄, (2000), “振動と波動”, 岩波書店』である。

振動学について広くじっくりと学びたい人には、『Mario Paz, (1997), “Structural Dynamics”, Chapman & Hall』が具体的でわかりやすい。ただし、大部な本である。

振動学をある程度理解している人で、振動学および耐震設計のテクニカルな部分を広範囲に学びたい人には、『柴田明徳, (2000), “最新耐震構造解析”, 森北出版株式会社』が良い。

著者

## 第1部 振動の基礎知識

この部では、この講座で振動学を学ぶために必要な基礎知識を説明する。**振動(vibration, oscillation)**とは、地震によって構造物がゆれるように、“物体がある位置を中心として運動を繰り返す”ことをいう。土木・建築における工学上の問題として、①地震によって生じる構造物の振動、②高架橋を走行する自動車によって発生する地盤の振動、③風によって生じる吊橋の振動、などがある。この講座は、主に①に関する振動を扱っているが、一般的な振動の概念を把握するためにも有効である。

### 第1章 振動の基礎知識

#### 1.1 動的解析モデル

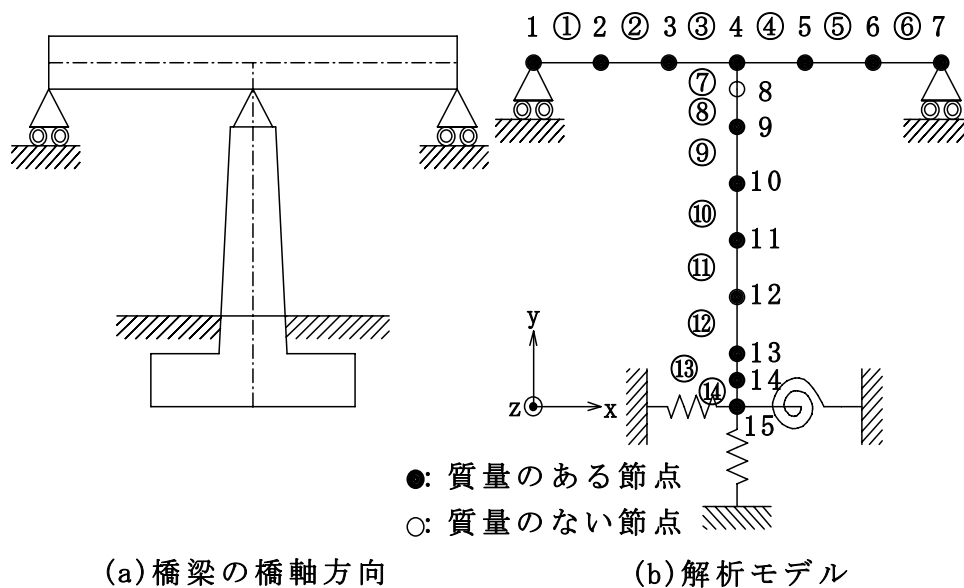


図1.1 動的解析のためのモデル化

#### (1) バネ・マスモデル

等断面の“片持ちはり”のような単純構造物の振動を、質量と外力が連続的に分布するとして解析することは可能である。しかし、少し複雑な構造物になると、そのような解を求めることは困難となる、と言うより工学上で無意味で

ある。なぜならば、工学上で最も合理的な解とは、必要とする精度を満足し、かつ経済的な解である。

例えば図 1.1(a)に示すような構造物の動的解析では、通常、同図(b)に示すように、部材中心軸(骨組)上の“**節点(grid point)と要素(element)**”で構成される**バネ・マスモデル**が用いられる。この力学モデルでは、①質量は節点にだけに存在する(すなわち、分布している質量は、適当な仮定で節点に分配する)、②外力は節点にだけに作用する(すなわち、分布している外力は、適当な仮定で節点に分配する)、③剛性(バネではバネ定数)と減衰(振動エネルギーを消費させる効果)は要素だけに存在し、それぞれの要素は真っ直ぐであり(部材が曲線の場合、それを分割し複数の直線要素に置き換える)、その断面は一定である(すなわち、変断面の場合は、平均的な断面に置き換える。線形な断面変化を考慮できるプログラムもあるが、この講座では、話を単純にするために、一定とする)、と仮定する。図 1.1(a)の 1,2,3,・・・と①, ②, ③・・・は、それぞれ節点番号と要素番号である。最近のコンピュータの高性能化によって、要素の分割を細かくしても計算することが可能である。したがって、このモデルでも、かなりの精度の解析が可能である。一般に提供されている“構造物の動的解析プログラム”では、このバネ・マスモデルが用いられている。この講座では、このバネ・マスモデルに限定して説明する。

なお、地震に対する“地盤の応答”や“地盤と一体になった基礎の応答”の動的解析では、コンピュータの性能が低い時代は、このバネ・マスモデルが用いられていたが、現在は有限要素法(FEM)を用いて解析するのが普通である。

## (2) 自由度

自由度は、振動学における重要な概念の一つである。あるバネ・マスモデルが振動しているとする。時刻  $t$  における振動形状が、 $n$  個の独立変数(節点の**変位**)によって完全に決まる場合、そのモデルは、 $n$  個の**自由度(degrees of freedom)**を持つといい、 $n$  **自由度系(system)**であるという。

図 1.2(a)は、質点と床の間に摩擦がないと仮定した 2 節点・1 要素のバネ・マスモデルである。節点 0 は拘束されているので、振動形状は、節点 1 の変位だけで定まる。したがって、このモデルは 1 自由度系である。図 1.2(b)は、4 節点・3 要素のバネ・マスモデルである。振動形状は、拘束されていない節点

2 と節点 3 の変位によって定まるから、このモデルは 2 自由度系である。図 1.2(c)の単振子は、角度  $\theta$  によって振動形状が定まるから、1 自由度系である。 $\theta$  は変位そのものではないので、**広義の変位**という。

バネ・マスモデルの自由度は、それぞれの節点の自由度を合計したものである。なぜならば、要素には質量が存在せず、外力も作用しないので、形状は節点の位置と回転だけで決まるからである。最も一般性のある 3 次元問題においては、“拘束されていない節点”は、 $x$  方向、 $y$  方向、 $z$  方向、 $x$  軸回り、 $y$  軸回り、 $z$  軸回りの 6 つの自由度を持つ。

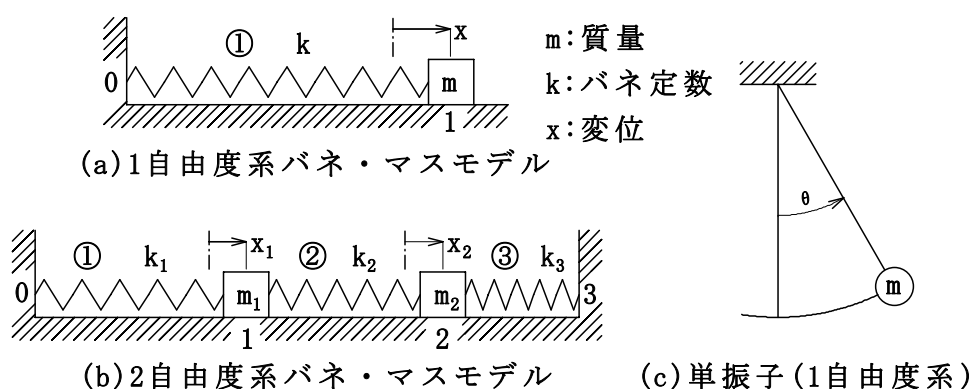


図 1.2 系の自由度

図 1.1(b)に示すような橋梁の橋軸方向(2次元)のバネ・マスモデルでは、各節点が“ $x$  方向の変位”，“ $y$  方向の変位”および“ $z$  軸回りの回転”の 3 つの自由度を持つ。しかし、節点 1 と節点 7 は、 $y$  方向が拘束されているので 2 自由度である。したがって、系の自由度は、 $3 \times 13 + 2 \times 2 = 43$  である。

自由度の本来の定義は上記のとおりである。しかし、“一般に提供されている動的解析プログラムの入力データ”では、もっと広範囲の意味で用いられている。それを、図 1.1(b)に示す解析モデルを用いて、具体的に説明しよう。 $x$  方向、 $y$  方向、 $z$  方向、 $x$  軸回り、 $y$  軸回り、 $z$  軸回りの自由度を、それぞれ 1,2,3,4,5,6 と称すると

- ① 2次元問題として解析する場合は、各節点の自由度を 1, 2, 6 に設定する、
- ② 拘束条件として、節点 1 と節点 7 の自由度 2 を地盤に対して拘束する、
- ③ 分布質量を節点質量に置き換えたために発生する慣性モーメントを無視する場合は、質量の自由度を 1, 2 に設定し、6 は設定しない、

④  $x$  方向に伸縮するバネを設定するためには、バネ要素の自由度を 1 に設定する、  
などである。

1 自由度と 2 自由度以上のバネ・マスモデルを、それぞれ **1 自由度系** (single-degree-of-freedom system) および **多自由度系** (multi-degrees-of-freedom system) という。

### (3) 剛性と復元力

土木・建築の構造材料として、鉄筋コンクリートや鋼材などが用いられる。それらを用いた部材として、軸方向部材(トラスの部材など)、曲げ部材(プレートガーダーの桁など)あるいは軸方向・曲げ部材(橋脚の柱など)がある。図 1.3(a)に示すように、軸方向部材と曲げ部材をそれぞれバネで表現し、荷重  $P$  がバネに作用したときの変位を  $x$  とすると、その荷重・変位特性は、材料によって異なる。なお、 $P$  と  $x$  の正方向はバネに引張り生じる方向とする。

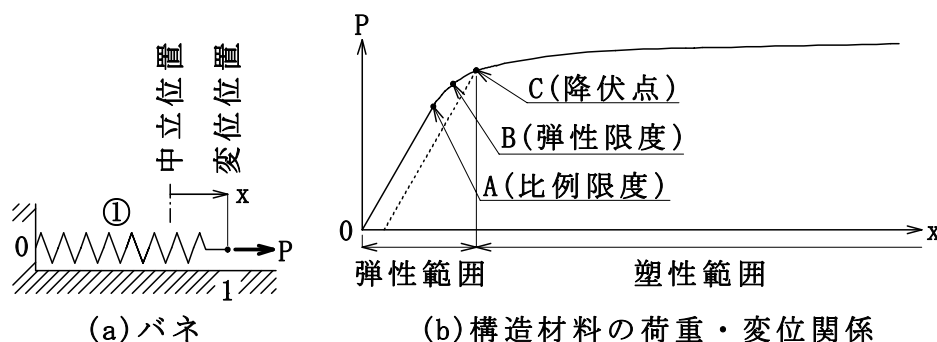


図 1.3 バネの荷重・変位関係

しかし、動的解析においては、通常、荷重・変位関係は、材料にかかわらず、図 1.3(b)に示すような特性を持つと考える。すなわち、荷重を単調に増加させた場合の  $P \cdot x$  関係は、OA 間では  $P$  と  $x$  が、ほぼ**線形**(linear)関係すなわち正比例する。A 点を**比例限度**という。さらに荷重を増加させると、線形でなくなるが、しばらくは、荷重を 0 に戻したときに変位(残留変位)もほぼ 0 に戻る。その限界の B 点を**弾性限度**という。それ以上に荷重を増加させると残留変位が生じるようになり、C 点に到ると材料が塑性変形を開始する。この C 点を**降伏点**、OC 間を**弾性範囲**という。

図 1.4(a)に示すような、 $P$ と $x$ が線形関係にある 1 自由度系を考える。すなわち、 $P$ と $x$ が

$$P = kx \tag{1.1}$$

である。変位が比例限度以下であっても、完全な線形ではないので、このモデルは、実際には存在しない理想化されたモデルである。

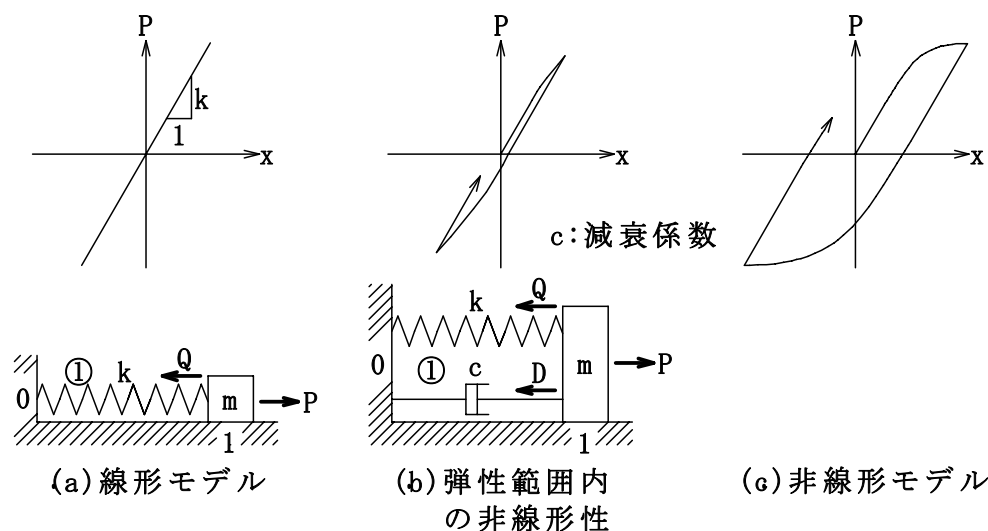


図 1.4 バネの荷重・変位関係のモデル化

そのとき、要素①に内力 $Q$ が生じる。 $Q$ は、節点 1 を中立位置に戻そうする力なので、**復元力**(restoring force)という。復元力の正方向を変位の逆とすると、力のつり合い $P+(-Q)=0$ より、 $Q=P$ であるので

$$Q = kx \tag{1.2}$$

である。 $k$ は、図 1.4(a)の上の図の“直線の勾配”すなわち要素の荷重に対する“変位のしにくさの程度”を表しているので、**剛性**あるいは**剛さ**(stiffness)とよばれる。

変位の履歴が弾性範囲であっても、図 1.4(b)に示すように、実際は $P \cdot x$ 関係は非線形性を示す。特に変位が塑性範囲に入ると、図 1.4(c)の上の図に示すように、大きな非線形性を示す。このように非線形性が大きい場合の動的解析は、変位を微小時間ごとに逐次近似法(第 15 章参照)によって求めるしか方法がない。この方法の問題点は、“計算に時間が非常にかかること”と“計算誤差の集積によって精度が落ちること”である。

そこで、振動が弾性範囲内である場合、非線形性が小さいことを考慮して、



図 1.4(b)の下図に示すように、要素①が、“線形なバネ”と“仮想のオイルダンパーのようなダッシュポット”によって構成されていると考える。この力学モデルの利点は、線形であるので理論的な解析が可能となり、計算時間が短くなり、逐次近似法の誤差が避けられることである。よく勘違いすることだが、実際にダッシュポットがあるわけではないので、真の復元力は、バネの復元力  $Q$  とダッシュポットの減衰力  $D$  を加えたものである。

図 1.5(a)に示すような**並列バネ**の剛性  $k_1, k_2$  は、1つバネに等価に置き換えることができる。等価剛性  $k_e$  は明らかに

$$k_e = k_1 + k_2 = \sum k_i \tag{1.3}$$

である。同図(b)の**直列バネ**の場合、節点に静的荷重  $P$  を加えたときのバネ①とバネ②の変位を  $x_1$  と  $x_2$  とすると、それぞれの変位とそれらの合計の変位  $x$  は

$$x_1 = \frac{P}{k_1}, \quad x_2 = \frac{P}{k_2}, \quad \therefore x = x_1 + x_2 = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2}$$

である。したがって、等価剛性  $k_e$  は以下のとおりである。

$$P = k_e x = k_e \left( \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} \right)$$

$$\therefore k_e = \frac{1}{1/k_1 + 1/k_2} = \frac{1}{\sum 1/k_i} \tag{1.4}$$



図1.5 バネの結合

### 例題 1.a 並列バネ

図 1.a(a)に示すように、柱に比べて“はり”の剛性が十分に大きな1層ラーメンを考える。このような建物を耐震設計する場合、図 1.a(b)に示すような**せん断建物**(shear building)とよばれる解析モデルが、しばしば用いられる。このモデルでは、①柱は“両端の回転が固定された曲げ部材”として機能するので、天井は水平方向だけに変位  $x$  する、②質量  $m$  は天井に集中している、と考

える。これらの仮定によって、層数と同数の自由度を持つ系にモデル化される。

したがって、このモデルは、図 1.a(c)に示すような“並列するせん断バネ・マスモデル”に等価に置き換えることができる。さらに、図 1.a(d)に示す1つのせん断バネを持った1自由度系に等価に置き換えることができる。このせん断バネの等価バネ定数  $k_{xe}$  を求めよう。断面諸元と材料定数は図に示した。柱は、一定な矩形断面  $B \times T$  とする。

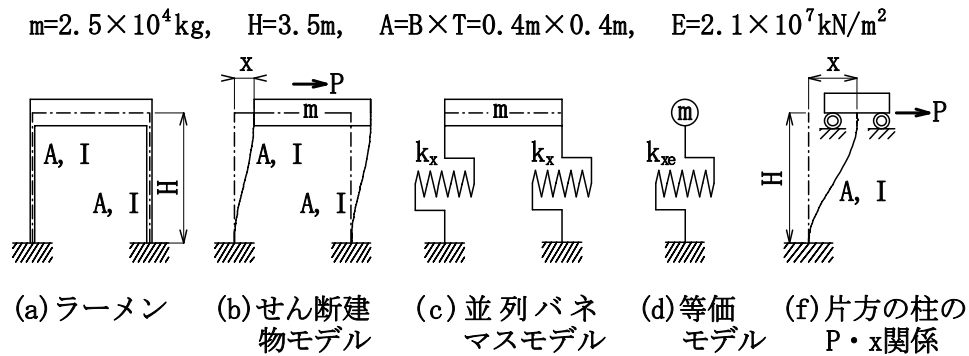


図1. a 1層ラーメンの水平方向に対する等価バネ

1本の柱の断面2次モーメントは

$$I = BT^3/12 = 0.4^4/12 = 0.00213 \text{ m}^4$$

である。図 1.a(f)に示すように、1本の柱を両端の回転が固定された曲げ部材と考える。天井位置に静的荷重  $P$  が作用したときの変位  $x$  は、はりの変形公式から

$$x = PH^3/12EI$$

である。ゆえに、図 1.a(c)の1つのせん断バネの剛性は、以下のとおりである。

$$k_x = P/x = 12EI/H^3 = 12 \times 2.1 \times 10^7 \times 0.00213/3.5^3 = 1.25 \times 10^4 \text{ kN/m}$$

並列バネ(図 1.a(c))であるので、図 1.a(d)の等価せん断バネは、式(1.3)より

$$k_{xe} = 2k_x = 2 \times 1.25 \times 10^4 = 2.50 \times 10^4 \text{ kN/m}$$

である。

### 例題 1.b 直列バネ

橋脚の橋軸方向(図 1.1(a)参照)に対する簡便な耐震設計方法として、図 1.b(a)に示すような解析モデルに置き換える方法がある。この解析モデルは、水平方向だけの変位に着目した1自由度系である。このモデルでは、①橋脚の負担す

る質量  $m$  は、支承の回転中心に集中し、その大きさは、適当な仮定で上部構造と柱の質量を置き換える、②ゴム支承，橋脚および基礎は，それぞれバネ，曲げ部材およびバネとして機能する，ここでは話を簡単にするために，基礎のバネは回転バネだけで構成されるとする。断面諸元と材料定数は図に示した。橋脚の柱は，一定な矩形断面  $B \times T$  とし，高さを  $H_p$  とする。 $H$  はフーチング底面から支承の回転中心までの高さである（この例では，柱の高さに比べて“支承の回転中心までの高さ”が非常に小さいので，図にはそれを無視して表現している）。 $k_R$  はゴム支承のせん断バネ定数， $k_\theta$  は基礎の回転バネ定数である。

$$m=9.0 \times 10^5 \text{ kg}, \quad H=27.0 \text{ m}, \quad H_p=24.0 \text{ m}, \quad A=B \times T=4.0 \text{ m} \times 2.8 \text{ m}$$

$$E=2.5 \times 10^7 \text{ kN/m}^2, \quad k_R=2.0 \times 10^4 \text{ kN/m}, \quad k_\theta=1.5 \times 10^{11} \text{ kN} \cdot \text{m/rad}$$

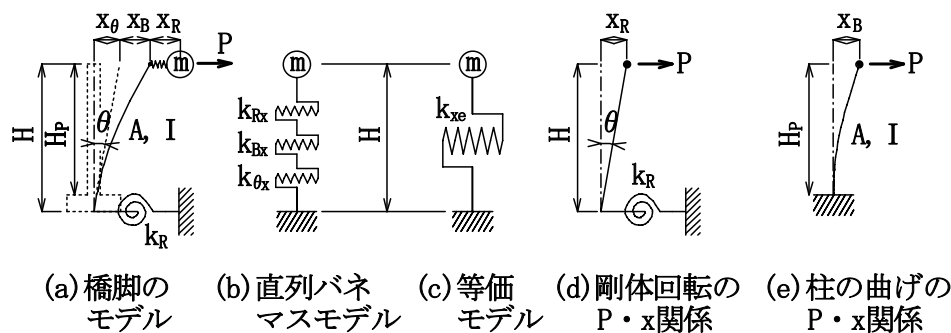


図1.10 橋脚の水平方向に対する等価バネ

支承の回転中心位置に  $x$  方向の静的荷重  $P$  を加えたときの変位  $x$  は，微小変位の仮定であるので，支承のバネの変位  $x_R$ ，橋脚の曲げ変位  $x_B$  と基礎のバネの回転による剛体変位  $x_\theta$  を足し合わせたものである。したがって，図 1.10(b) に示す直列する 3 つのせん断バネを持った 1 自由度系に等価に置き換えることができる。さらに，図 1.10(c) に示す 1 つの等価せん断バネを持った 1 自由度系に置き換えることができる。この等価バネ定数  $k_{xe}$  を求めよう。

ゴム支承の等価せん断バネ定数は，元のバネ定数に一致するから

$$k_{Rx} = k_R = 2.0 \times 10^4 \text{ kN/m}$$

である。

荷重  $P$  が作用したとき，図 1.10(d) に示すように，基礎の回転バネの回転は，フーチング底面のモーメントが  $PH$  であるから

$$\theta = PH/k_\theta$$

である。これよる支承の回転中心位置の変位は、 $\theta$ が微小であることから

$$x_{\theta} = H\theta = PH^2/k_{\theta}$$

である。この剛体回転に相当する等価せん断バネ定数は、以下のとおりである。

$$k_{\theta x} = P/x_{\theta} = k_{\theta}/H^2 = 1.5 \times 10^{11}/27^2 = 2.06 \times 10^8 \text{ kN/m}$$

柱に比べてフーチングの断面は大きいので、その曲げ変形を無視する。柱の断面 2 次モーメントは

$$I = BT^3/12 = 4.0 \times 2.8^3/12 = 7.32 \text{ m}^4$$

である。図 1.b(e)に示す片持ちはりの変位は、はりの公式から

$$x_B = PH_p^3/3EI$$

である。この曲げに相当する等価せん断バネ定数は、以下のとおりである。

$$k_{Bx} = P/x_B = 3EI/H_p^3 = 3 \times 2.5 \times 10^7 \times 7.32/24^3 = 3.79 \times 10^4 \text{ kN/m}$$

それらバネは直列であるので、図 1.b(c)の等価せん断バネは、式(1.4)から

$$\begin{aligned} k_{xe} &= \frac{1}{1/k_{Rx} + 1/k_{\theta x} + 1/k_{Bx}} \\ &= \frac{1}{1/2.0 \times 10^4 + 1/2.06 \times 10^8 + 1/3.97 \times 10^4} = 1.33 \times 10^4 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

である。この例題では、直接基礎の実際の設計例を参考としたので、回転バネが非常に剛であるために、その影響が出ていない。

## 1.2 運動方程式

多自由度系は、質点が要素を介して相互に力を及ぼしあって、一見、複雑な**連成振動(coupled vibration)**する。しかし、各質点の運動は、それぞれ**ニュートンの運動法則**が支配しているので、それぞれについて運動方程式を構築し、それらで構成される連立微分方程式を解くことによって、系の振動を求めることができる。

### (1) ニュートンの運動法則

2次元問題に例をとる。図 1.6 に示すように、質点に“力 $F_1, F_2$ ”と分布外力を節点位置に置き換えたために生じた“**広義の力**である**力のモーメント**(以降、モーメント) $M_{1z}, M_{2z}$ (添え字に $z$ が付いているのは $z$ 軸回りの意味)”が作用している。質点には、**慣性質量**(以降、**質量**) $m$ と**慣性モーメント** $I_z$ が存在する。

なお、質点は、本来、質量だけが存在する点であるが、この講座では、分布質量を節点位置に置き換えたために生じた慣性モーメントも存在するとする。

ニュートンの運動法則とは、質点の加速度と力の関係が

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{1x} + F_{2x} = \sum F_x \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = F_{1y} + F_{2y} = \sum F_y \\ I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_{1z} + M_{2z} = \sum M_z \end{cases} \quad (1.5)$$

であることである。ここで、 $d^2x/dt^2$  と  $d^2y/dt^2$  は、それぞれ加速度の  $x$  方向と  $y$  方向の成分である。 $d^2\theta/dt^2$  は  $z$  軸回りの角加速度である。 $(F_{1x}, F_{1y})$  と  $(F_{2x}, F_{2y})$  は、それぞれ  $F_1$  と  $F_2$  の ( $x$  方向,  $y$  方向) の成分である。

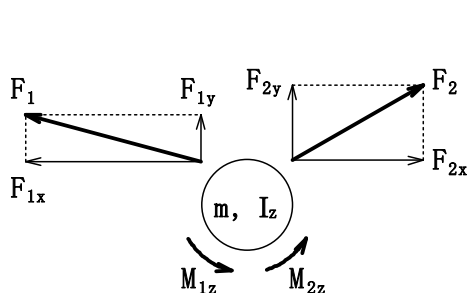


図1.6 質点に作用する力

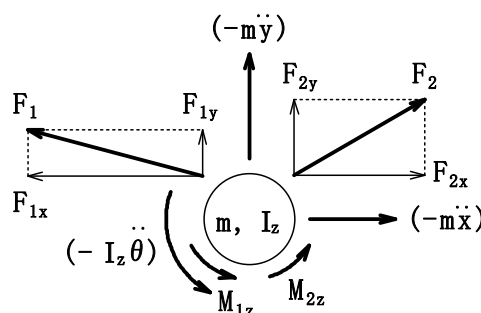


図1.7 自由物体図

## (2) ダランベールの原理と自由物体図

式(1.5)を変形すると

$$(-m\ddot{x}) + \sum F_x = 0, \quad (-m\ddot{y}) + \sum F_y = 0, \quad (-I_z\ddot{\theta}) + \sum M_z = 0 \quad (1.6)$$

となる。ここで、 $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ ,  $\ddot{y} = d^2y/dt^2$ ,  $\ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2$  である。

すなわち、仮想の力  $(-m\ddot{x}), (-m\ddot{y}), (-I_z\ddot{\theta})$  を導入すると、運動状態でも力のつり合いが成り立つ。これが**ダランベール(D'Alembert)の原理**である。振動学では、この原理がよく用いられる。仮想の力は**慣性力(inertia force)**とよばれる。 $(-I_z\ddot{\theta})$  はモーメントであるが、“**広義の慣性力**” と考えればよい。また、この講座では、ダランベールの原理を適用する場合、“静的な力のつりあい” と区別するために**動的な力のつりあい**とよぶことにする。

力のつり合いを考えると、通常、われわれが行っていることではあるが、図 1.7 に示すような自由物体図(free body diagram)を用いることは、解析をする上で有効である。自由物体図とは、質点を要素から切り離し、それに作用しているすべての力を示した図である。

### 例題 1.c 運動方程式の構築

橋脚(図 1.1(a))を 2 次元問題として動的解析する場合、最も簡単な解析モデルとして、図 1.c(a)に示すように、1 質点、水平せん断バネと鉛直バネで構成される 2 自由度系が用いられる。時刻  $t < 0$  においては、重力だけが作用し、 $t \geq 0$  で地震のような外力  $f_x(t), f_y(t)$  が加わったとする。 $t \geq 0$  における運動方程式を構築してみよう。見かけ上、直列バネであるが、水平せん断バネ(等価バネ定数  $k_{xe}$ )と鉛直バネ(等価バネ定数  $k_{ye}$ )は、それぞれ水平力と鉛直力に対してのみ機能する。

図 1.c(a)に示すように、重力による鉛直バネの縮みを  $y_0$  とすると

$$mg = k_{ye}y_0 \tag{a}$$

である。水平方向の変位を  $x$ ，鉛直方向に重力だけが作用した状態に対する変位を  $y$  とする。

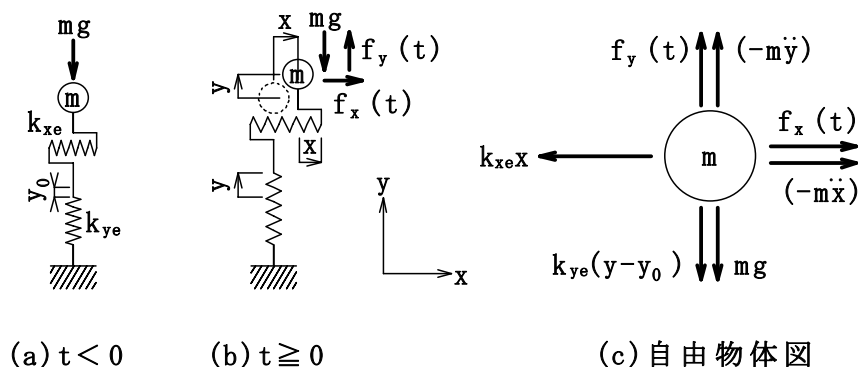


図 1. c 運動方程式の構築(橋脚モデル, 図 1. b 参照)

自由物体図を図 1.(c)に示す。 $x$  方向には外力・慣性力・復元力， $y$  方向には重力・外力・慣性力・復元力が作用している。動的な力のつり合いから、 $x$  方向の運動方程式は

$$(-m\ddot{x}) - k_{xe}x + f_x(t) = 0, \quad \therefore m\ddot{x} + k_{xe}x - f(t) = 0 \tag{b}$$

である。y方向の運動方程式は、復元力が $k_{ye}(y-y_0)$ であるから

$$(-m\ddot{y}) - k_{ye}(y-y_0) - mg + f_y(t) = 0, \quad \therefore m\ddot{y} + k_{ye}y - k_{ye}y_0 + mg - f_y(t) = 0$$

である。これに式(a)を代入すると

$$m\ddot{y} + k_{ye}y - f(t) = 0 \quad (c)$$

となる。すなわち、このような条件においては、重力は振動に影響を及ぼさないことがわかる。

### 1.3 要約

われわれが動的解析で用いるモデルは、通常、節点と要素で構成されるバネ・マスモデルである。節点には質量と外力だけ、要素には剛性と減衰だけが存在し、1つの要素における断面は通常一定であると仮定する。

振動学で重要な概念の一つである自由度とは、ある系の振動形状を完全に決めることができる独立変数の数である。

振動が弾性範囲内であっても、材料の非線形性のために、復元力と変位の関係は非線形性を示す。しかし、弾性範囲の場合、非線形性が小さいことと、計算を簡単にするために、要素が“線形な剛性をもったバネ”と“仮想のダッシュポット”で構成されていると考える。しかし、実際にはダッシュポットがあるわけではないので、真の復元力は、バネの復元力とダッシュポットの減衰力を加えたものである。

運動(振動)は、“ニュートンの運動法則”が支配している。振動学では、その法則を変形した“ダランベールの原理”によって、運動方程式を構築する場合が多い。それは、仮想の力である慣性力を導入して、振動中でも力のつり合いが成り立つという考え方である。

## 第1部の参考文献

- [1.1] Mario Paz, (1997), “Structural Dynamics”, Chapman & Hall.
- [1.2] 柴田明德, (2000), “最新耐震構造解析”, 森北出版株式会社。
- [1.3] 金原寿郎, (1996), “基礎物理学”, 裳華房。
- [1.4] 戸田盛和, (1998), “力学”, 岩波書店。
- [1.5] 野田直剛・中村保, (1991), “基礎塑性力学”, 日新出版。

## 第 2 部 1 自由度系の線形振動

線形振動とは、復元力と変位が線形関係にある振動をいう。複雑に見える多自由度系の線形振動も、変数変換によって複数の 1 自由度系の線形振動に分解できる。したがって、1 自由度系の線形振動の性質を理解することは重要である。この部では、それを説明する。

### 第 2 章 非減衰および減衰自由振動

外力が作用していない状態における振動を**自由振動**(free vibration)という。1 自由度系の非減衰自由振動は、調和振動となる。その周期は、質量と剛性の比から定まり、固有周期  $T$  とよばれ、系の振動特性を表す最も重要な量である。減衰自由振動は、一定の周期  $T_D$  で時間とともに減衰していく。 $T_D > T$  であるが、実際の構造物の場合、通常、その差は小さい。この章では、1 自由度系の自由振動を説明する。

#### 2.1 非減衰自由振動

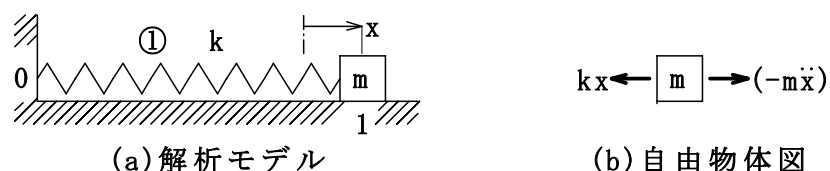


図 2.1 非減衰自由振動

非減衰とは、実際には存在しない“振動エネルギーの消費が全く生じない理想化された状態”である。図 2.1(a)に示す 1 自由度系の非減衰自由振動を考える。節点 1 の変位と質量をそれぞれ  $x$  と  $m$ 、要素①のバネ定数(剛性)を  $k$  とする。変位と慣性力は右方向を、復元力は逆方向を正とする。

ダランベールの原理による“動的な力のつりあい”は、同図(b)の自由物体図から

$$(-m\ddot{x}) - kx = 0$$

である。振動学でよく用いる形に式を変形すると



$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.1)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.2)$$

となる。このように右辺が 0 である**定数係数の 2 階線形微分方程式**を、2 階の**斉次方程式**とよび、このように  $\dot{x}$  の項がない場合を 2 階の**標準形斉次方程式**という。標準形斉次方程式(2.2)の 2 つの独立な解(**基本解**)  $x = \cos \omega t$  と  $x = \sin \omega t$  は、容易に見出すことができる。**一般解**は、基本解の 1 次結合(それぞれに任意定数  $a_1$  と  $a_2$  を乗じてたし合わせたもの)で表わせるから

$$x = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t \quad (2.3)$$

である。なぜならば、式(2.3)は微分方程式(2.2)を満足するとともに、あらゆる**初期条件**(initial condition)すなわち  $t=0$  における変位と速度を満足するからである。

$t=0$  における変位と速度を、それぞれ  $d_0$  と  $v_0$  とする。式(2.3)に  $t=0, x=d_0$  を代入すると

$$a_1 = d_0$$

となる。式(2.3)を微分して、 $t=0, \dot{x}=v_0$  を代入すると

$$v_0 = a_2 \omega, \quad \therefore a_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

となる。それらを式(2.3)に代入すると、その初期条件に対する**特解**が求まる

$$x = d_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (2.4)$$

この式を 1 つの  $\cos$  関数で表わすことができる。すなわち、式を変形すると

$$x = \sqrt{d_0^2 + (v_0/\omega)^2} \left( \frac{d_0}{\sqrt{d_0^2 + (v_0/\omega)^2}} \cos \omega t - \frac{-v_0/\omega}{\sqrt{d_0^2 + (v_0/\omega)^2}} \sin \omega t \right) \quad (2.5)$$

となる。ここで

$$A \equiv \sqrt{d_0^2 + (v_0/\omega)^2} \quad (2.6)$$

$$\cos \theta \equiv \frac{d_0}{\sqrt{d_0^2 + (v_0/\omega)^2}}, \quad \sin \theta \equiv \frac{-v_0/\omega}{\sqrt{d_0^2 + (v_0/\omega)^2}} \quad (2.7)$$

とおくと、式(2.5)は加法定理から下式を得る。

$$x = A(\cos \theta \cos \omega t - \sin \theta \sin \omega t)$$

$$\therefore x = A \cos(\omega t + \theta) \tag{2.8}$$

また、1つのsin関数で表わすこともできる。すなわち、次のようにおくと

$$\sin \psi \equiv \frac{d_0}{\sqrt{d_0^2 + (v_0/\omega)^2}}, \quad \cos \psi \equiv \frac{v_0/\omega}{\sqrt{d_0^2 + (v_0/\omega)^2}} \tag{2.9}$$

式(2.5)は加法定理から次式を得る。

$$x = A(\sin \psi \cos \omega t + \cos \psi \sin \omega t)$$

$$\therefore x = A \sin(\omega t + \psi) \tag{2.10}$$

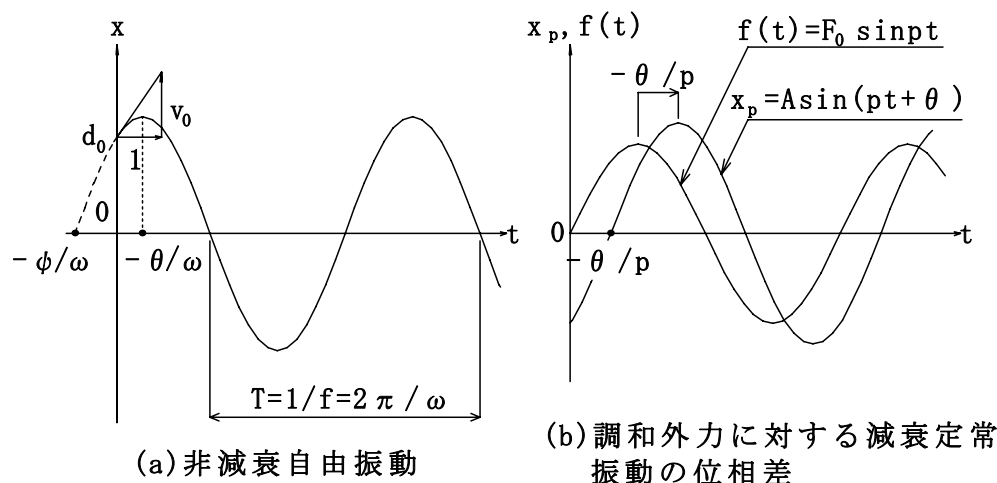


図2.2 調和振動

式(2.8)と(2.10)は、式(2.4)を変形したものであるから、全く同じ曲線である(図 2.2(a))。このように、非減衰自由振動では、変位  $x$  が時間  $t$  の  $\cos$  関数あるいは  $\sin$  関数となる。このような振動を**調和振動**(harmonic vibration, **単振動**)とよぶ。 $\omega t + \theta$  あるいは  $\omega t + \psi$  は**位相**(phase, 単位: rad)とよばれる。 $A$  は最大変位を表し、**振幅**(amplitude, 単位: m)という。 $\theta$  あるいは  $\psi$  は**初期位相**(initial phase, 単位: rad)という。 $A$  と  $\theta$  (あるいは  $\psi$ ) は初期条件によって定まる。

$\omega$  は**固有円振動数**(natural circular frequency, 単位: rad/s)とよばれる。1周期  $T$  の間に位相は  $2\pi$  進むから、 $\omega T = 2\pi$  である。ゆえに

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2.11}$$

であり、 $T$ は**固有周期**(natural period, 単位：s)とよばれる。振動数  $f$  は、単位時間の繰り返し回数であるから、固有周期の逆数となり

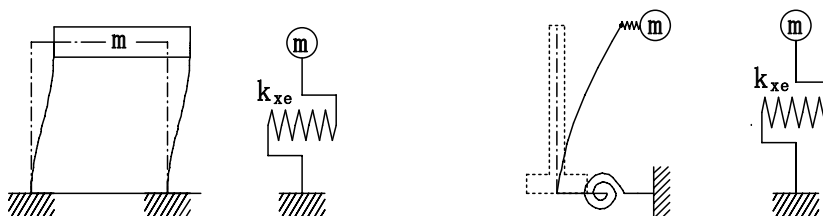
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{2.12}$$

であり、**固有振動数**(natural frequency, 単位：Hz=1/s)とよばれる。これらに“固有”という名称が付くのは、質量と剛性の比によって定まる系固有の量であるからである。振動学では、これらのなかで  $\omega$  が最も用いられる量で、 $2\pi$  sec間の振動数とおぼえればよく、“円”を付けないでただ“振動数”とよばれることが多い。

**例題 2.a 固有円振動数, 固有振動数と固有周期**

$$\begin{aligned} m &= 2.50 \times 10^4 \text{ kg} \\ k_{xe} &= 2.50 \times 10^4 \text{ kN/m} \\ &= 2.50 \times 10^7 \text{ kg/s}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= 9.0 \times 10^6 \text{ kg} \\ k_{xe} &= 1.33 \times 10^4 \text{ kN/m} \\ &= 1.33 \times 10^7 \text{ kg/s}^2 \end{aligned}$$



(a)せん断建物モデル(図1. a参照) (b)橋脚モデル(図1. b参照)

図 2. a 非減衰自由振動

(1) せん断建物モデル

例題 1.a のせん断建物モデルについて、固有円振動数、固有振動数と固有周期を求めよう。図 2.a(a)に計算条件を示した。等価せん断バネ定数  $k_{xe}$  は例題 1.a で求めた値である。

固有円振動数は式(2.2)より

$$\omega = \sqrt{k_{xe}/m} = \sqrt{2.50 \times 10^7 / 2.50 \times 10^4} = 31.6 \text{ rad/s}$$

である。周期は式(2.11)より

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/31.6 = 0.199\text{s}$$

である。振動数は式(2.12)より

$$f = 1/T = 1/0.199 = 5.04\text{Hz}$$

である。

## (2) 橋脚モデル

例題 1.b の橋脚モデルについて、固有円振動、固有振動数と固有周期を求めよう。図 2.a(b)に必要な条件を示した。等価バネ定数  $k_{xe}$  は例題 1.b で求めた値である。

固有円振動数は式(2.2)より

$$\omega = \sqrt{k_{xe}/m} = \sqrt{1.33 \times 10^7 / 9.0 \times 10^5} = 3.84\text{rad/s}$$

である。周期は式(2.11)より

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/3.84 = 1.64\text{s}$$

である。振動数は式(2.12)より

$$f = 1/T = 1/1.64 = 0.610\text{Hz}$$

である。

調和振動は、以下のような重要な性質をもっている。

① 調和振動は、振幅と円振動数と初期位相を与えられれば確定する。しかし、初期位相は重要な意味をもたない。なぜならば、時刻の原点のとり方によって変わってくるからである。重要なのは、同じ振動数の調和振動の**位相差**である。たとえば、調和的な外力( $f(t) = F_0 \sin pt$ )が作用した減衰振動は、初めは複雑な振動をするが、ある程度の時間がたつと、減衰によって外力と同じ振動数の調和振動(定常振動,  $x_p = A \sin(pt + \theta)$  ( $-\pi < \theta \leq \pi$ ))となる。この定常振動は、減衰の影響によって、図 2.2(b)に示すように、調和的な外力に対して位相が遅れる。

振動学の本では、位相を  $pt - \theta$  と表わす本と  $pt + \theta$  と表わす本がある。また、多くの本では、位相差について軽く扱っている場合が多い。この本では、それを明確にするために、位相を  $pt + \theta$  と表現する。そうすると、“ $pt$  に対して

$pt + \theta$  は、 $0 < \theta \leq \pi$  の場合は位相が進んでいる、 $-\pi < \theta \leq 0$  の場合は位相が遅れている” ことになる。このように、位相の進みと  $\theta$  のプラスと一致してわかりやすいからである。

② 任意の周期振動は、振動数の異なる調和振動の和として表わすことができる。地震の地盤加速度のように、一定時間だけ継続する不規則の振動も、やはり調和振動の和として表わすことができる(詳細は第 18 章)。

③ このように分解された調和振動の成分のなかで、振幅の大きい調和振動の振動数を**卓越振動数**(predominant frequency)とよぶ。地震においては、地震の地盤加速度の卓越振動数と構造物の固有振動数が接近していると、構造物に大きな応答を生じる。

## 2.2 減衰自由振動

実際の構造物では、振動エネルギーを消費させる減衰が存在する。①減衰の要因は多く存在するが、そのメカニズムはよくわかっていない、②復元力に比べて、減衰力は小さい、③解析を容易にしたい、などを理由として、減衰力  $D$  が速度  $\dot{x}$  に比例すると仮定する**粘性減衰**(viscous damping)が、通常、動的解析に用いられる。すなわち

$$D = c\dot{x} \tag{2.13}$$

である。 $c$  は**減衰係数**(coefficient of damping)とよばれる。減衰力は、速度と逆方向を正とする。

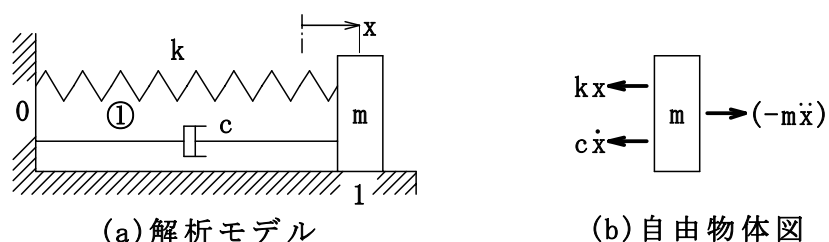


図 2.3 減衰自由振動

図 2.3(a)に示す減衰自由振動を考える。同図(b)の自由物体図の“動的な力のつり合い” から、運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{2.14}$$

となる。書き直すと以下のとおりとなる。

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2x = 0, \quad h = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (2.15)$$

$h$ は**減衰定数**あるいは**減衰比**(damping ratio)とよばれる。 $h < 1$ では、周期的な振動となるが、 $h \geq 1$ では振動が生じない。 $h = 1$ は、その境界であるので、**臨界減衰**(critical damping)とよばれる。

微分方程式(2.15)の解法は、一般に複素数が用いられる(第17章)。ここでは、実務における動的解析の対象である  $h < 1$  について、複素数を用いずに標準形齊次方程式に変換することによって一般解を求めてみよう。すなわち、以下のように変数変換する。

$$x(t) = g(t)z(t) \quad (2.16)$$

これを2回連続して微分すると

$$\dot{x} = g\dot{z} + \dot{g}z, \quad \ddot{x} = g\ddot{z} + 2\dot{g}\dot{z} + \ddot{g}z$$

となる。これらと式(2.16)を(2.15)に代入すると

$$g\ddot{z} + (2\dot{g} + 2h\omega g)\dot{z} + (\ddot{g} + 2h\omega\dot{g} + \omega^2g)z = 0 \quad (2.17)$$

となる。この式を標準形にするためには、 $\dot{z}$ にかかる項が0となるように  $g$  を選べばよいから

$$2\dot{g} + 2h\omega g = 0, \quad \therefore \frac{dt}{dg} = -\frac{1}{h\omega g}$$

となる。積分すると

$$t = -\frac{1}{h\omega} \ln g, \quad \therefore g = e^{-h\omega t} \quad (2.18)$$

となる。これを式(2.16)に代入すると、変数変換式を得る。

$$x(t) = e^{-h\omega t} z(t) \quad (2.19)$$

式(2.18)を2回連続して微分すると

$$\dot{g} = -h\omega e^{-h\omega t}, \quad \ddot{g} = h^2\omega^2 e^{-h\omega t} \quad (2.20)$$

となる。式(2.18)・(2.20)を(2.17)に代入すると

$$e^{-h\omega t} \ddot{z} + (h^2\omega^2 e^{-h\omega t} - 2h^2\omega^2 e^{-h\omega t} + \omega^2 e^{-h\omega t})z = 0$$

$$\therefore e^{-h\omega t} \ddot{z} + (1 - h^2)\omega^2 e^{-h\omega t} z = 0$$

となる。  $e^{-h\omega t} \neq 0$  を消去すると、標準形を得る。

$$\ddot{z} + \omega_D^2 z = 0, \quad \omega_D = \sqrt{1-h^2} \omega \quad (2.21)$$

この標準形の一般解は、式(2.3)より

$$z = a_1 \cos \omega_D t + a_2 \sin \omega_D t \quad (2.22)$$

である。これを式(2.19)に代入すると、式(2.15)の一般解

$$x = e^{-h\omega t} (a_1 \cos \omega_D t + a_2 \sin \omega_D t) \quad (2.23)$$

が求まる。

初期条件の  $t=0, x=d_0$  を式(2.23)に代入すると

$$a_1 = d_0$$

となる。これを式(2.23)に代入してを微分すると

$$\dot{x} = -h\omega e^{-h\omega t} (d_0 \cos \omega_D t + a_2 \sin \omega_D t) + e^{-h\omega t} (-\omega_D d_0 \sin \omega_D t + \omega_D a_2 \cos \omega_D t)$$

となる。この式に、初期条件の  $t=0, \dot{x}=v_0$  を代入すると

$$v_0 = -h\omega d_0 + \omega_D a_2, \quad \therefore a_2 = \frac{v_0 + h\omega d_0}{\omega_D}$$

となる。ゆえに、初期条件に対する特解は

$$x = e^{-h\omega t} \left\{ d_0 \cos \omega_D t - \left( -\frac{v_0 + h\omega d_0}{\omega_D} \right) \sin \omega_D t \right\} \quad (2.24)$$

となる。これを1つの  $\cos$  関数で表すと、式(2.8)と同様に下式となる。

$$x = A e^{-h\omega t} \cos(\omega_D t + \alpha) \quad (2.25)$$

$$A = \sqrt{d_0^2 + \left\{ (v_0 + h\omega d_0) / \omega_D \right\}^2} \quad (2.26)$$

$$\cos \alpha = \frac{d_0}{\sqrt{d_0^2 + \left\{ (v_0 + h\omega d_0) / \omega_D \right\}^2}} \quad (2.27)$$

$$\sin \alpha = \frac{-(v_0 + h\omega d_0 / \omega_D)}{\sqrt{d_0^2 + \left\{ (v_0 + h\omega d_0) / \omega_D \right\}^2}} \quad (2.28)$$

変位  $x$  (式(2.25)) と時間  $t$  の関係を図 2.4 に示す。  $x$  は 2 つの包絡曲線にはさまれて、振動しながら徐々に振幅が 0 に近づいていく。振幅は 1 サイクルごとに変化するが、振動の時間間隔は一定である。すなわち、変位曲線が時間軸を

同じ方向に横切る時間間隔，あるいは同じ包絡線と接する( $\cos(\omega_D t + \alpha) = 1$ あるいは $-1$ )時間間隔は一定である。この時間間隔 $T_D$ は，減衰自由振動の周期とよばれ，式(2.25)から

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-h^2}\omega} = \frac{T}{\sqrt{1-h^2}} \quad (2.29)$$

である。実際の構造物の減衰定数は，だいたい0.1以下である。それを式(2.29)に代入すると

$$T_D = 1.005T \quad (2.30)$$

となる。すなわち，その場合， $T_D$ は非減衰自由振動の固有周期 $T$ とほとんど差がない。

一般に，固有周期は非減衰自由振動の周期 $T$ を指し，減衰自由振動の周期 $T_D$ はそうよばない。後述する地震応答スペクトルは， $T_D$ ではなく固有周期 $T$ で整理される。

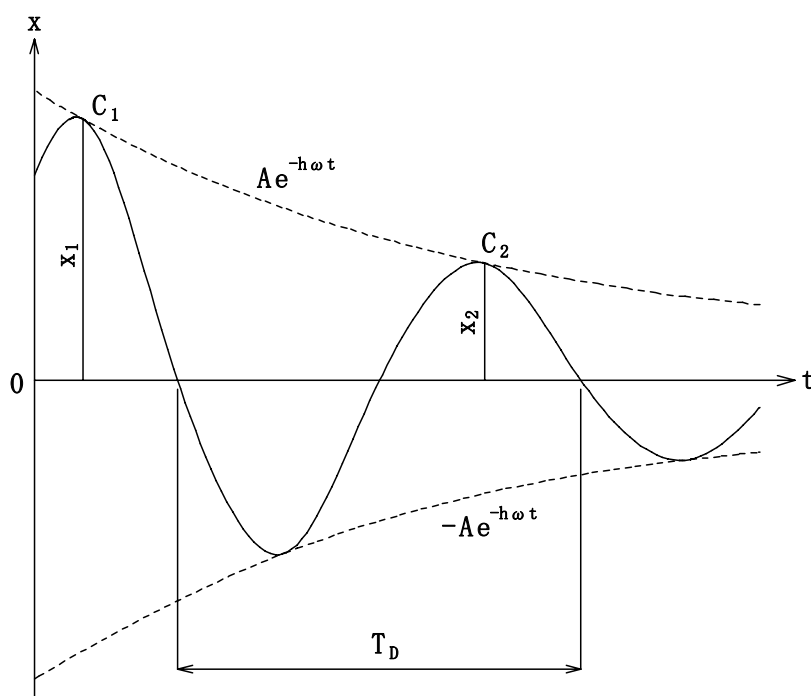


図2.4 減衰自由振動

図2.4に示すように，変位が最初に包絡線と接する点を $C_1$ とし，その時刻を $t_1$ とすると， $\cos(\omega_D t_2 + \alpha) = 1$ より変位 $x_1$ は



$$x_1 = Ae^{-h\omega t_1} \quad (2.31)$$

である。1周期後の接点  $C_2$  における変位  $x_2$  は、同様に

$$x_2 = Ae^{-h\omega(t_1+T_D)} \quad (2.32)$$

である。それらの比の自然対数は

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{Ae^{-h\omega t_1}}{Ae^{-h\omega(t_1+T_D)}} = h\omega T_D, \quad \therefore T_D = \frac{\delta}{h\omega} \quad (2.33)$$

である。この式を(2.29)を代入すると

$$\delta = \frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}}, \quad \therefore h = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} \quad (2.34)$$

となる。 $h$  が 1 に比べて十分小さい場合、減衰定数  $h$  は、式(2.34)の第 1 式より

$$h = \frac{\delta}{2\pi} \quad (2.35)$$

である。

$\delta$  は**対数減衰率**(logarithmic decrement)とよばれ、任意の連続する 2 接点の間で一定である。したがって、連続する 2 の接点の変位を測定すれば、その系の減衰定数を求めることができる。実験の精度から、2 つの連続した接点の変位を正確に測定することは困難である。しかし、それらは変位の極大値あるいは極小値とほぼ同じであるので、通常、これらが接点の変位の代替として用いられる。

### 例題 2.b 減衰定数, 減衰係数, 減衰自由振動の円振動数と周期

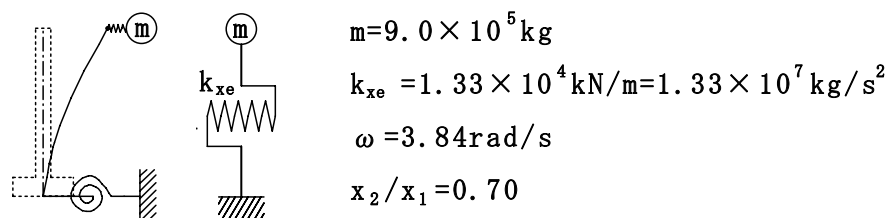


図 2. b 減衰自由振動(橋脚モデル, 図 1. b 参照)

例題 1.b において、自由振動の実験結果、変位の連続する極大値  $x_1$  と  $x_2$  の比が、1 対 0.7 であった。その場合について、減衰定数、減衰係数、自由振動の

円振動数と周期を求めよう。図 2.b に計算条件を示した。 $k_{xe}$  は例題 1.b,  $\omega$  と  $T$  は例題 2.a で求めた値である。

対数減衰率は式(2.33)より

$$\delta = \ln x_1/x_2 = \ln 1/0.7 = 0.357$$

である。減衰定数は式(2.35)から

$$h = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.357}{2\pi} = 0.0568$$

である。減衰係数は式(2.15)より

$$c = 2h\sqrt{k_{xe}m} = 2 \times 0.0568 \times \sqrt{1.33 \times 10^7 \times 9.0 \times 10^5} = 3.46 \times 10^5 \text{ kg/s}$$

である。

減衰自由振動の円振動数は式(2.21)より

$$\omega_D = \sqrt{1-h^2}\omega = \sqrt{1-0.0568^2} \times 3.84 = 3.83 \text{ rad/s}$$

である。周期は式(2.29)より

$$T_D = \frac{T}{\sqrt{1-h^2}} = \frac{1.64}{\sqrt{1-0.0568^2}} = 1.64 \text{ s}$$

である。

## 2.3 要約

1 自由度系の非減衰自由振動は、調和振動である。その周期は、系の質量と剛性から決まる固有の量(固有周期)である。

減衰自由振動は、実際の構造物のように減衰定数が小さい場合、振動しながら徐々に振幅が 0 に近づいていく。変位曲線が時間軸を同じ方向に横切る時間間隔(周期)は一定である。この周期は、固有周期よりやや長い、その差は小さい。変位曲線において、隣り合う極大値(あるいは隣り合う極小値)の比の自然対数(対数減衰率)はほぼ一定である。この対数減衰率を実験的に測定することによって、系の重要な量である減衰定数を求めることができる。

### 第 3 章 調和外力による非減衰および減衰強制振動

外力が作用した状態における振動を**強制振動**(forced vibration)という。工学上で対象となるのは、通常、この振動である。たとえば、地震に対する構造物の応答は、一種の強制振動である。任意の外力は、振動数の異なる調和外力に分解できる。すなわち、任意の強制振動は、これらの調和外力における振動を足し合わせたものである。したがって、調和外力における振動の性質を理解することは、重要である。この章では、調和強制振動について説明する。

#### 3.1 非減衰強制振動

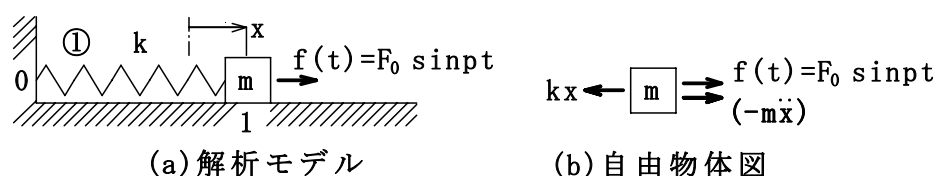


図 3.1 調和外力による非減衰振動

図 3.1(a)に示す非減衰 1 自由度系において、節点 1 に外力  $f(t)$  が作用している場合の運動方程式は、図 3.1(b)に示す自由物体図から

$$m\ddot{x} + kx = f(t) \tag{3.1}$$

である。外力が調和的であると

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin pt \quad (F_0 \text{ と } p \text{ は外力の振幅と円振動数}) \tag{3.2}$$

と表わせる。書き直すと

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin pt, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.3}$$

となる。この右辺が 0 でない方程式すなわち非斉次方程式の一般解は、“斉次解である式(2.3)”と“式(3.3)を満足する 1 つの特解  $x_p$ ”をたし合わせたものであるから

$$x = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t + x_p \tag{3.4}$$

と表わせる。なぜならば、式(3.3)の左辺に斉次解を代入すると 0 となり、特解を左辺に代入すると右辺と一致するから、それらをたし合わせた式(3.4)は、

(3.3)の解であり、さらにすべての初期条件を満足するからである。

特解を次のように仮定する。

$$x_p = A_p \sin pt \quad (3.5)$$

なぜならば、非減衰であるので、特解は、外力と同じ円振動数で位相差がないと予想されるからである。式(3.5)を2回連続して微分すると

$$\dot{x}_p = pA_p \cos pt, \quad \ddot{x}_p = -p^2 A_p \sin pt$$

となる。この式の第2式と(3.5)を(3.3)に代入すると

$$-p^2 A_p \sin pt + \omega^2 A_p \sin pt = \frac{F_0}{m} \sin pt$$

となる。 $\sin pt \neq 0$ であるから、 $A_p$ は、**振動数比**  $p/\omega$ を $r$ とすると

$$A_p = \frac{F_0/m}{\omega^2 - p^2} = \frac{F_0/m}{\omega^2(1-r^2)} = \frac{F_0/m}{k/m(1-r^2)} = \frac{F_0/k}{1-r^2} = \frac{\delta_s}{1-r^2}$$

となる。これを式(3.5)に代入すると特解

$$x_p = \frac{\delta_s}{1-r^2} \sin pt$$

を得る。ここで、 $\delta_s = F_0/k$ は、外力の最大値(振幅) $F_0$ に対する静的変位である。

これを式(3.4)に代入すると、以下に示す一般解を得る。

$$x = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t + \frac{\delta_s}{1-r^2} \sin pt$$

あるいは

$$x = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t + \frac{F_0/m}{\omega^2 - p^2} \sin pt \quad (3.6)$$

外力が作用する以前は、系が静止しているという工学上の問題が多い。初期条件として、 $t=0$ の変位と速度を0とすると、式(3.6)から任意定数 $a_1, a_2$ の値が容易に確定する。

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{p}{\omega} \frac{\delta_s}{1-r^2} = -\frac{r\delta_s}{1-r^2}$$

これらを式(3.6)に代入すると、その初期条件に対する特解は

$$x = \underbrace{-\frac{\delta_s r}{1-r^2} \sin \omega t}_{\text{過渡的な項}} + \underbrace{\frac{\delta_s}{1-r^2} \sin pt}_{\text{強制振動の項}} \quad (3.7)$$

となる。すなわち、非減衰強制振動は，“固有円振動数で振動する項”と“調和外力の円振動数で振動する項”とに分解できる。前者は、減衰がある場合は徐々に消滅するので過渡的な項(transient term)とよばれる。後者の強制振動の項は、初期条件の影響を受けない。

外力の円振動数  $p$  が固有円振動数  $\omega$  に限りなく近い場合、すなわち  $r \cong 1$  の場合は、式(3.7)は

$$\begin{aligned} x &= \frac{\delta_s}{1-r^2} (\sin pt - r \sin \omega t) \cong \frac{\delta_s}{1-r^2} (\sin pt - \sin \omega t) \\ &= \frac{\delta_s}{1-r^2} \cdot 2 \sin \frac{p-\omega}{2} t \cdot \cos \frac{p+\omega}{2} t \cong \frac{\delta_s}{1-r^2} \cdot (p-\omega) t \cdot \cos \frac{p+\omega}{2} t \\ &= \frac{\delta_s}{(1-r)(1+r)} \omega \cdot (r-1) t \cdot \cos \omega \frac{r+1}{2} t = -\frac{\delta_s \omega}{1+r} t \cdot \cos \omega \frac{r+1}{2} t \\ \therefore x &\cong -\frac{\delta_s \omega}{2} t \cdot \cos \omega t \quad (3.8) \end{aligned}$$

となる。図 3.2 に示すように、外力の円振動数  $p$  が固有円振動数  $\omega$  に限りなく近づくと、変位  $x$  が時間とともに無限大に発散していく。これを共振(resonance)という。しかし、実際は減衰があるために無限大に発散することはない。 $p = \omega$  の場合を共振点(resonance point)とよぶ。実際の構造物のように減衰定数  $h$  が小さい場合は、共振点で応答がほぼ最大となる。

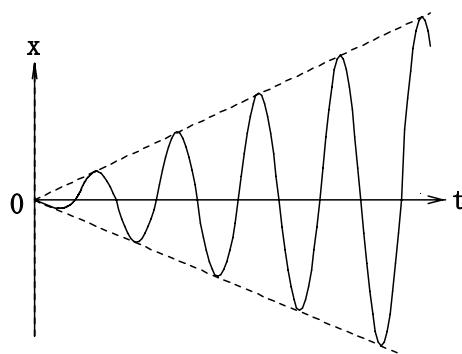


図 3.2 共振

### 3.2 減衰強制振動

図 3.3(a)に示す減衰 1 自由度系において、節点 1 に外力  $f(t)$  が作用している場合の運動方程式は、図 3.3(b)に示す自由物体図から

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{3.9}$$

である。外力が調和的であると

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin pt \tag{3.10}$$

と表わせる。書き直すと

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin pt, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad h = \frac{c}{2\sqrt{km}} \tag{3.11}$$

となる。式(3.11)の一般解は、“斉次解(2.23)”と“式(3.11)を満足する 1 つの特解  $x_p$ ”をたし合わせたものであるから

$$x = e^{-h\omega t} (a_1 \cos \omega_D t + a_2 \sin \omega_D t) + x_p, \quad \omega_D = \sqrt{1 - h^2} \omega \tag{3.12}$$

と表わせる。

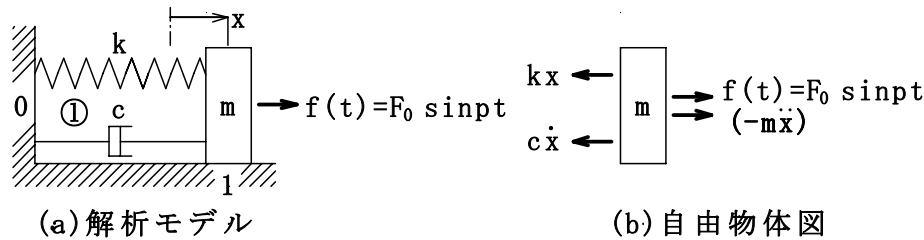


図 3.3 調和外力による減衰振動

特解を次のように仮定する。

$$x_p = A_p \sin(pt + \theta) = A_p (\sin \theta \cos pt + \cos \theta \sin pt) = A_1 \cos pt + A_2 \sin pt \tag{3.13}$$

なぜならば、特解は、外力と同じ円振動数であるが、減衰力があるために外力に対して位相差があると予想されるからである。式(3.13)を 2 回連続して微分すると下式を得る。

$$\dot{x}_p = -pA_1 \sin pt + pA_2 \cos pt, \quad \ddot{x}_p = -p^2 A_1 \cos pt - p^2 A_2 \sin pt$$

これらと式(3.13)を(3.11)に代入すると

$$\begin{aligned} & \{(\omega^2 - p^2) A_1 + 2h\omega p A_2\} \cos pt \\ & + \{-2h\omega p A_1 + (\omega^2 - p^2) A_2\} \sin pt = \frac{F_0}{m} \sin pt \end{aligned}$$

となる。この式が時間  $t$  にかかわらず成り立つためには

$$(\omega^2 - p^2)A_1 + 2h\omega p A_2 = 0, \quad -2h\omega p A_1 + (\omega^2 - p^2)A_2 = \frac{F_0}{m}$$

$$\therefore (1-r^2)A_1 + 2hrA_2 = 0, \quad -2hrA_1 + (1-r^2)A_2 = \frac{F_0}{m\omega^2}$$

である。  $A_1, A_2$  について解くと

$$A_1 = \frac{-2hr}{(1-r^2)^2 + 4h^2r^2} \cdot \frac{F_0}{m\omega^2} = \frac{-2hr}{(1-r^2)^2 + 4h^2r^2} \cdot \frac{F_0}{m(k/m)} = \frac{-2hr}{(1-r^2)^2 + 4h^2r^2} \cdot \delta_s$$

$$A_2 = \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + 4h^2r^2} \cdot \frac{F_0}{m\omega^2} = \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + 4h^2r^2} \cdot \frac{F_0}{m(k/m)} = \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + 4h^2r^2} \cdot \delta_s$$

となる。これらを式(3.13)に代入すると特解は

$$x_p = \delta_s \left\{ \frac{-2hr}{(1-r^2)^2 + 4h^2r^2} \cos pt + \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + 4h^2r^2} \cdot \sin pt \right\}$$

$$= \frac{\delta_s}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4h^2r^2}} \left\{ \frac{-2hr}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4h^2r^2}} \cdot \cos pt + \frac{1-r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4h^2r^2}} \cdot \sin pt \right\}$$

となる。ゆえに

$$x_p = A_p \sin(pt + \theta) \tag{3.14}$$

$$A_p = \frac{\delta_s}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4h^2r^2}} \tag{3.15}$$

$$\sin \theta = \frac{-2hr}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4h^2r^2}}, \quad \cos \theta = \frac{1-r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4h^2r^2}} \tag{3.16}$$

である。一般解は、式(3.14)を(3.12)に代入した下式である。

$$x = \underbrace{e^{-hot} (a_1 \cos \omega_D t + a_2 \sin \omega_D t)}_{\text{過渡応答}} + \underbrace{A_p \sin(pt + \theta)}_{\text{定常応答}} \tag{3.17}$$

式(3.17)の右辺の第1項は、時間とともに消滅し、第2項だけ残る。前者を**過渡応答**(transient response)という。後者は、初期条件の影響を受けず、**定常応答**(steady-state response)という。式(3.16)から、常に  $\sin \theta < 0$  である。すなわち、調和外力に対する定常振動の位相差は  $-\pi < \theta < 0$  であるので、定常振動

は、調和外力に対して位相が常に遅れる。

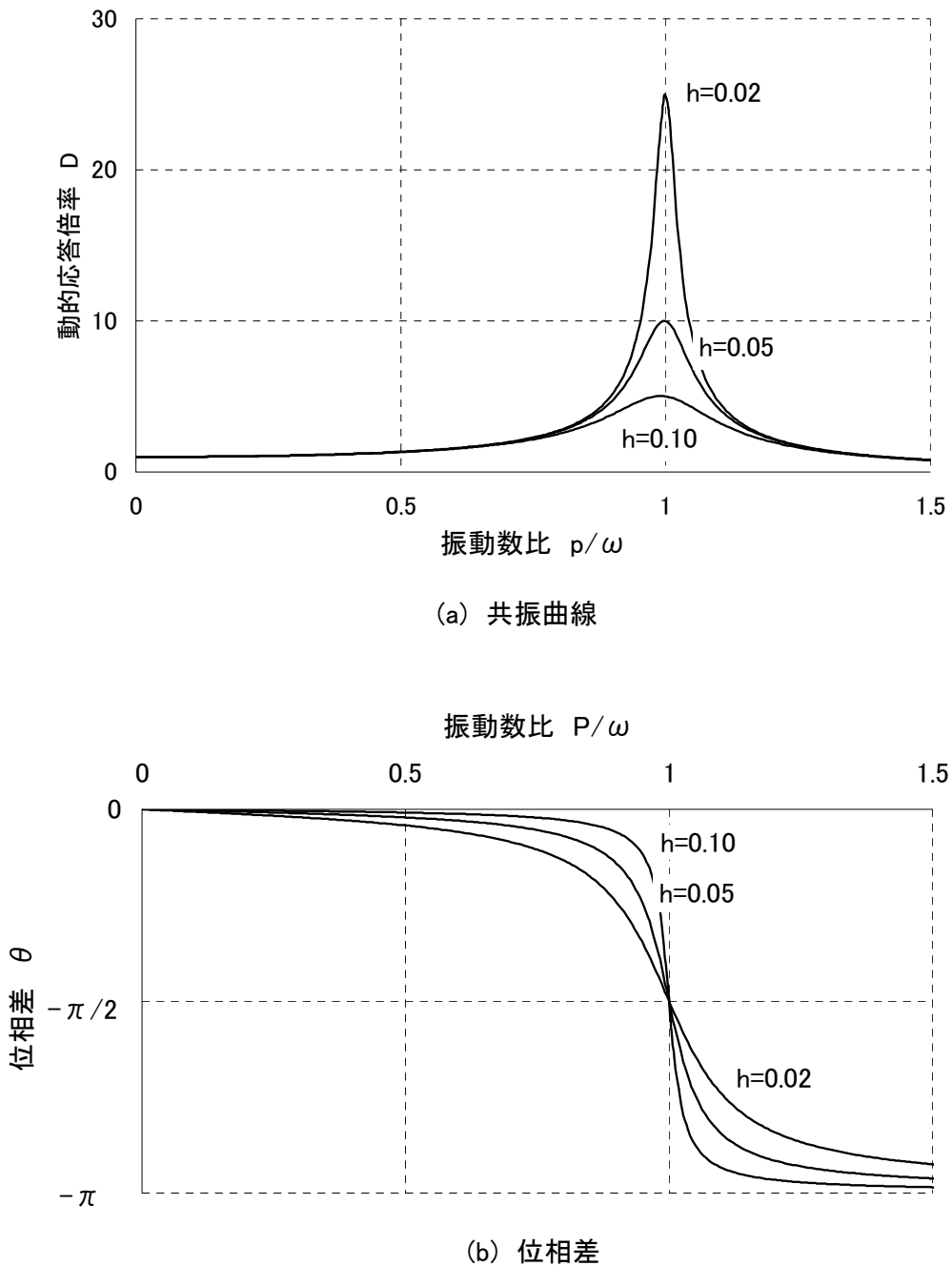


図3.4 調和外力に対する定常振動の動的応答倍率と位相差

過渡応答は時間とともに減少するので、通常、定常応答だけで、減衰調和強制振動を評価する。定常振動は一定振幅(最大変位)  $A_p$  で調和振動する。 $A_p$  と  $\delta_s$



との比は、**動的応答倍率**(dynamic magnification factor)  $D$  とよばれる。すなわち

$$D = \frac{A_p}{\delta_s} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4h^2r^2}} \quad (3.18)$$

である。共振点( $r=1$ )では  $D=1/2h$  である。

図 3.4(a)に、減衰定数  $h$  をパラメーターとして、動的応答倍率  $D$  と振動数比  $r(=p/\omega)$  の関係を示す。これを **共振曲線**(resonance curve)とよぶ。実際の構造物の減衰定数は、だいたい 0.1 以下であるので、 $h=0.02, 0.05, 0.1$  について共振曲線を描いた。共振点付近で非常に大きな応答が生じることがわかる。定常振動の最大変位  $A_p$  は

$$A_p = D\delta_s = \frac{DF_0}{k} \quad (3.19)$$

$D$  と  $F_0$  に比例する。  $h$  が小さい場合、共振点付近では、調和外力の振幅  $F_0$  より、動的応答倍率  $D$  の方が、 $A_p$  に対してはるかにに大きい影響を及ぼす。

図 3.4(b)に、調和外力に対する定常振動の位相差を示した。

### 例題 3.a 調和強制振動の定常振動における最大変位と最大断面力

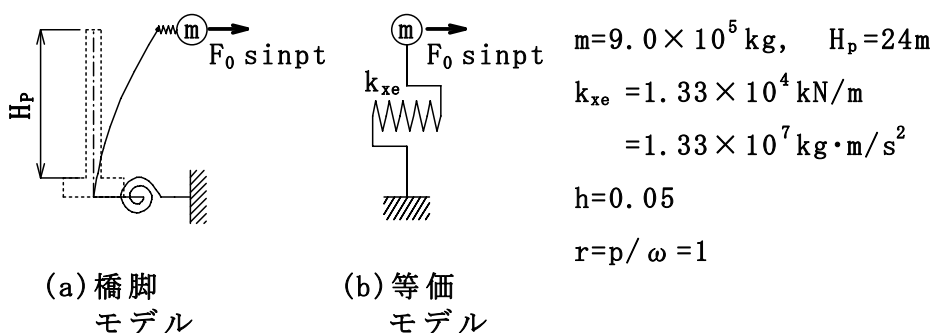


図 3. a 調和強制振動の定常振動(橋脚モデル, 図 1. b 参照)

例題 1.b において、固有振動数と振動数が同じである調和強制力  $F_0 \sin \omega t$  が作用する場合、最大変位、柱下端における最大せん断力と最大曲げモーメントを求めよう。図 3.a に計算条件を示す。等価せん断バネ定数  $k_{xe}$  は例題 1.b で求めた値である。ただし、減衰定数は  $h=0.05$ 、 $F_0$  は重力の 20% とする。すなわ

ち

$$F_0 = 0.2mg = 0.2 \times 9.0 \times 10^5 \times 9.8 = 1.76 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1.76 \times 10^3 \text{ kN}$$

である。

$F_0$  に対する静的変位は

$$\delta_s = F_0/k_{xe} = 1.76 \times 10^3 / 1.33 \times 10^4 = 0.132 \text{ m}$$

である。 $r=1$  の場合の動的応答倍率は、式(3.18)より

$$D = 1/2h = 1/2 \times 0.05 = 10.0 \tag{a}$$

であるから、最大変位は

$$x_{\max} = D\delta_s = 10.0 \times 0.132 = 1.32 \text{ m} \tag{b}$$

である。最大変位が、 $F_0$  に対する静的変位  $\delta_s$  の  $D$  倍であるということは、ダランベールの原理における質点に作用する荷重が  $F_0$  の  $D$  倍であるということである。それは最大せん断力であるから

$$S_{\max} = DF_0 = 10.0 \times 1.76 \times 10^3 = 1.76 \times 10^4 \text{ kN}$$

である。柱下端の最大曲げモーメントは

$$M_{\max} = (DF_0)H_p = 1.76 \times 10^4 \times 24 = 4.22 \times 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

である。

### 3.3 調和地盤振動に対する減衰応答

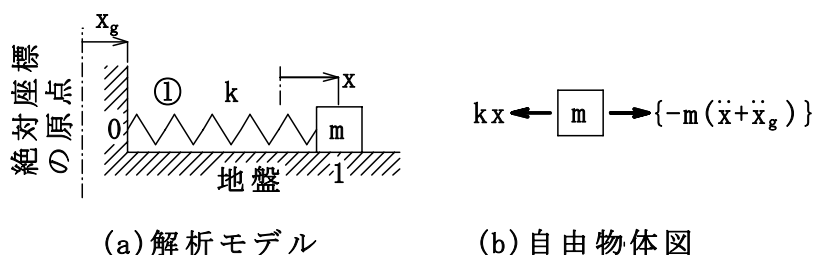


図 3.5 調和地盤振動に対する非減衰振動

図 3.5 は、地盤と構造物の関係をモデル化した図である。構造物は地盤に固定された質量とバネで構成されている系である。絶対座標系における地盤の変位を  $x_g$ 、節点 1 の地盤に対する相対変位を  $x$  とする。節点 1 の絶対加速度は、 $\ddot{x} + \ddot{x}_g$  であるから、運動方程式は、図 3.5(b) の自由物体図から

$$m(\ddot{x} + \ddot{x}_g) + c\dot{x} + kx = 0, \quad \therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g \tag{3.20}$$

である。式(3.9)と比較すると、地盤が振動する場合の運動方程式は、外力  $f(t)$  を  $-m\ddot{x}_g$  に置き換えた式と一致する。ただし、 $x$  は地盤に対する相対変位である。

式(3.20)を書き直すと

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x = -\ddot{x}_g, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad h = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (3.21)$$

となる。

地盤が調和振動しているとする。したがって、地盤の絶対変位を

$$x_g = a_0 \sin pt \quad (3.22)$$

と表わすことができる。絶対加速度は、2回微分して

$$\ddot{x}_g = -a_0 p^2 \sin pt \quad (3.23)$$

である。式(3.23)を(3.21)に代入すると

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x = a_0 p^2 \sin pt \quad (3.24)$$

となる。この微分方程式は、式(3.11)で  $F_0/m$  を  $a_0 p^2$  に置き換えたものである。

したがって、その一般解は、式(3.11)の一般解である式(3.14)・(3.15)・(3.16)

で、 $\delta_s$ を

$$\delta_s = \frac{F_0}{k} = \frac{m a_0 p^2}{k} = \frac{a_0 p^2}{\omega^2} = a_0 r^2$$

に置き換えたものである。ゆえに、式(3.24)の一般解は以下のとおりである。

$$x = \underbrace{e^{-hot} (a_1 \cos \omega_D t + a_2 \sin \omega_D t)}_{\text{過渡応答}} + \underbrace{A_p \sin(pt + \theta)}_{\text{定常応答}} \quad (3.25)$$

$$A_p = \frac{a_0 r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4h^2 r^2}} \quad (3.26)$$

$$\sin \theta = \frac{-2hr}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4h^2 r^2}}, \quad \cos \theta = \frac{1-r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4h^2 r^2}} \quad (3.27)$$

耐震設計で重要である“地盤の最大絶対加速度  $|x_g|_{\max} (= a_0 p^2)$ ”に対する“節点 1 の定常応答の最大絶対加速度  $|\ddot{x} + \ddot{x}_g|$ ”の比すなわち“**加速度応答倍率**  $D_a = |\ddot{x} + \ddot{x}_g|_{\max} / |\ddot{x}_g|_{\max}$ ”を求めよう。応答絶対加速度  $(\ddot{x} + \ddot{x}_g)$  は、式(3.21)を移項することによって

$$\ddot{x} + \ddot{x}_g = -2h\omega\dot{x} - \omega^2 x \quad (3.28)$$

である。

定常応答の変位は、式(3.25)・(3.26)より

$$x = \frac{a_0 r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4h^2 r^2}} \sin(pt + \theta) \quad (3.29)$$

である。速度は、式(3.29)を微分して

$$\dot{x} = \frac{a_0 r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4h^2 r^2}} p \cos(pt + \theta) \quad (3.30)$$

である。式(3.29)・(3.30)を(3.28)に代入すると

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \ddot{x}_g &= -\frac{a_0 r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4h^2 r^2}} \left\{ \omega^2 \sin(pt + \theta) + 2h\omega p \cos(pt + \theta) \right\} \\ &= -\frac{a_0 (p/\omega)^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4h^2 r^2}} \left\{ \omega^2 \sin(pt + \theta) + 2h\omega p \cos(pt + \theta) \right\} \\ &= -\frac{a_0 p^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4h^2 r^2}} \left\{ \sin(pt + \theta) + 2hr \cos(pt + \theta) \right\} \\ &= -\frac{a_0 p^2 \sqrt{1+4h^2 r^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4h^2 r^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+4h^2 r^2}} \sin(pt + \theta) + \frac{2hr}{\sqrt{1+4h^2 r^2}} \cos(pt + \theta) \right\} \\ \therefore \ddot{x} + \ddot{x}_g &= -a_0 p^2 \sqrt{\frac{1+4h^2 r^2}{(1-r^2)^2 + 4h^2 r^2}} \cdot \sin(pt + \theta + \alpha) \quad (3.31) \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+4h^2 r^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{2hr}{\sqrt{1+4h^2 r^2}} \quad (3.32)$$

となる。式(3.23)より  $|x_g|_{\max} = ap^2$  であるから、加速度応答倍率は、

$$D_a = \frac{|\ddot{x} + \ddot{x}_g|_{\max}}{|\ddot{x}_g|_{\max}} = \sqrt{\frac{1+4h^2 r^2}{(1-r^2)^2 + 4h^2 r^2}} \quad (3.33)$$

である。これを図示したのが図 3.6 である。加速度応答倍率  $D_a$  は、共振点付近

で非常に大きい。定常振動の最大応答絶対加速度  $|\ddot{x} + \ddot{x}_g|_{\max}$  は

$$|\ddot{x} + \ddot{x}_g|_{\max} = D_a (a_0 p^2) \tag{3.34}$$

と書けるから、 $h$  が小さい場合、共振点付近では、地盤加速度の振幅  $a_0$  より、加速度応答倍率  $D_a$  すなわち振動数比  $r$  の影響の方がはるかに大きい。共振点 ( $r=1$ ) では加速度応答倍率  $D_a$  は

$$D_a = \sqrt{\frac{1+4h^2}{4h^2}} = \sqrt{\frac{1}{4h^2} + 1} \tag{3.35}$$

である。実際の構造物のように減衰定数  $h$  が小さい場合、動的応答倍率  $D$  と同じ  $1/2h$  である。

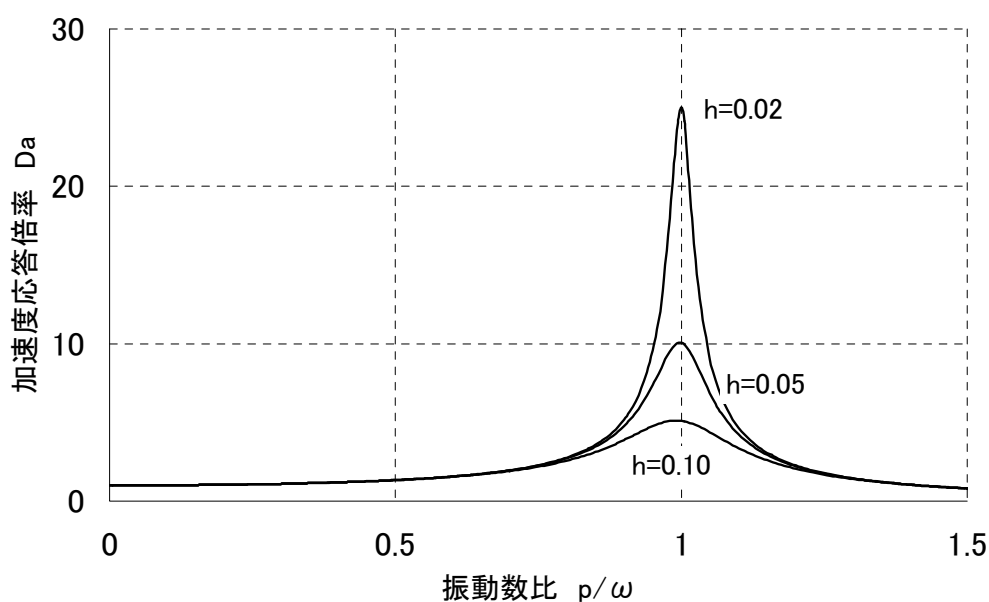


図3.6 加速度応答倍率

### 例題 3.b 調和地盤振動の定常振動

例題 1.b において、地盤が調和振動しているとする。その条件で、以下の問題を解いてみよう。図 3.b に計算条件を示す。等価せん断バネ定数  $k_{xe}$  は例題 1.b で求めた値である。ただし、減衰定数は  $h=0.05$  とする。

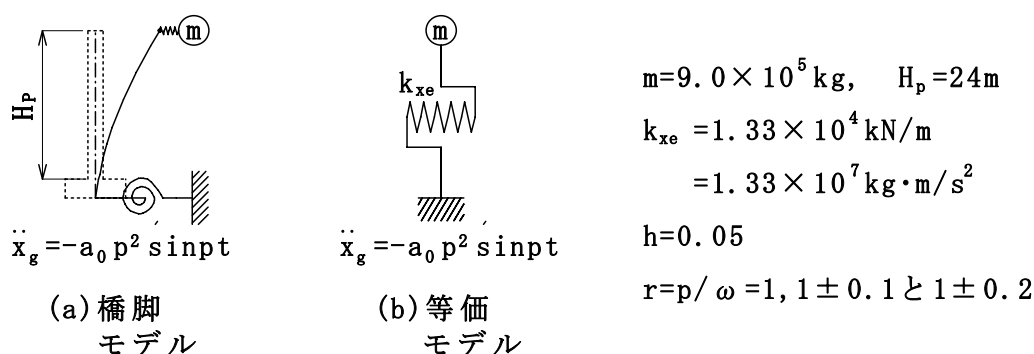


図3.b 調和地盤振動の定常振動(橋脚モデル, 図1.b参照)

(1) 加速度応答倍率と振動数比の関係

$r = p/\omega = 1, 1 \pm 0.1, 1 \pm 0.2$ について調べよう。 $r = 1$ は式(3.35)より

$$D_a = \sqrt{\frac{1}{4h^2} + 1} = \sqrt{\frac{1}{4 \times 0.05^2} + 1} = 10.0$$

である。 $r = 0.9$ と $r = 1.1$ は, 式(3.33)より, それぞれ

$$D_a = \sqrt{\frac{1 + 4h^2 r^2}{(1 - r^2)^2 + 4h^2 r^2}} = \sqrt{\frac{1 + 4 \times 0.05^2 \times 0.9^2}{(1 - 0.9^2)^2 + 4 \times 0.05^2 \times 0.9^2}} = 4.48$$

$$D_a = \sqrt{\frac{1 + 4h^2 r^2}{(1 - r^2)^2 + 4h^2 r^2}} = \sqrt{\frac{1 + 4 \times 0.05^2 \times 1.1^2}{(1 - 1.1^2)^2 + 4 \times 0.05^2 \times 1.1^2}} = 4.24$$

である。 $r = 0.8$ と $r = 1.2$ は, 同様に, それぞれ

$$D_a = \sqrt{\frac{1 + 4 \times 0.05^2 \times 0.8^2}{(1 - 0.8^2)^2 + 4 \times 0.05^2 \times 0.8^2}} = 2.72$$

$$D_a = \sqrt{\frac{1 + 4 \times 0.05^2 \times 1.2^2}{(1 - 1.2^2)^2 + 4 \times 0.05^2 \times 1.2^2}} = 2.21$$

である。加速度応答倍率は, 共振点から遠ざかるとともに, 急激に減少することがわかる。

(2) 最大変位と断面力

地盤加速度の振幅が重力加速度の 20%すなわち地盤加速度が

$\ddot{x}_g = -0.2g \sin pt$  の条件で、 $r = 0.8$  における最大変位と最大断面力を求めよう。

最大応答絶対加速度は、式(3.34)より

$$\left| \ddot{x} + \ddot{x}_g \right|_{\max} = D_a (0.2g) = 2.72 \times 0.2g = 2.72 \times 0.2 \times 9.8 = 5.33 \text{ m/s}^2$$

である。ダランベールの原理における最大荷重  $P_{\max}$  は、慣性力だけであるから

$$P_{\max} = m \left| \ddot{x} + \ddot{x}_g \right|_{\max} = 9.0 \times 10^5 \times 5.33 = 4.80 \times 10^6 \text{ kg} \times \text{m/s}^2 = 4.80 \times 10^3 \text{ kN}$$

である。したがって、最大変位は

$$x_{\max} = P_{\max} / k_{xe} = 4.80 \times 10^3 / 1.33 \times 10^4 = 0.361 \text{ m}$$

である。この場合、最大せん断力は最大荷重に一致するから

$$S_{\max} = P_{\max} = 4.80 \times 10^3 \text{ kN}$$

である。柱下端の最大曲げモーメントは

$$M_{\max} = P_{\max} H_p = 4.8 \times 10^3 \times 24 = 1.15 \times 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

である。

### 3.4 要約

調和外力が作用する 1 自由度系の強制振動は、以下のような振動特性を示す。非減衰強制振動では、“固有円振動数  $\omega$  の調和振動”と“外力の円振動数  $p$  の調和振動”に分解できる。 $p = \omega$  のとき振動は発散する。これを共振といい、 $p = \omega$  の場合を共振点という。減衰強制振動では、“減衰自由振動の円振動数  $\omega_D = \sqrt{1 - h^2} \omega$  の振動”と“外力の円振動数  $p$  の振動”に分解できる。前者は、時間とともに消滅し、過渡応答とよばれる。後者は、初期条件の影響を受けず、定常振動とよばれる。定常振動の振幅は、実際の構造物のように減衰定数が小さい場合は、共振点付近で非常に大きくなる。その振幅は、“外力の振幅”と“振動数比  $r = p/\omega$ ”の影響を受けるが、共振点付近では、振動数比の影響の方がはるかに大きい。

調和絶対加速度で振動する地盤上の減衰 1 自由度系の振動は、上記の減衰強制振動とほとんど同じ性状を示す。

## 第4章 不規則な外力による非減衰および減衰強制振動

不規則に変化する外力に対する応答は、コンピュータの発達した現在では、数値解析によって近似解を求めるのが一般的である。しかし、厳密解のデュアメル積分を理解することは、振動を学ぶものにとって重要である。また、第5章に述べる擬似応答スペクトルを理解するためにも必要である。この章では、デュアメル積分を説明する。

### 4.1 非減衰強制振動に対するデュアメル積分

図4.1(a)に示すような“不規則に変化する外力  $f(\tau)$  が作用する1自由度系の非減衰振動  $x(\tau)$ ”の“時刻  $\tau = t$  における変位  $x(t)$  の厳密解”を求めよう。ただし、 $\tau < 0$  で  $f(\tau) = 0$  で、初期条件は

$$x(0) = d_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (4.1)$$

とする。

図4.1(b)に示す“初期条件(式(4.1))に対する非減衰自由振動の  $\tau = t$  における変位  $x_0(t)$ ”は、式(2.4)より

$$x_0(t) = d_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (4.2)$$

である。図4.1(c)の左図に示すように、 $t$  を  $n$  分割し、 $\Delta\tau = t/n$ 、 $t_i = i\Delta\tau$  ( $0 \leq i \leq n$ ) とする。同図の左図、中間図と右図は、外力が瞬間的な微少時間  $0 \leq \tau < t_1$ 、 $t_1 \leq \tau < t_2$  と  $t_{i-1} \leq \tau < t_i$  において作用した場合のそれぞれの非減衰振動  $x_1(\tau)$ 、 $x_2(\tau)$  と  $x_i(\tau)$  を示している。すなわち、静止状態から微少時間  $\Delta\tau$  の瞬間外力によって加速され、それ以降は非減衰自由振動する。 $\tau = t$  における変位  $x(t)$  は、線形であるから、初期条件とすべての瞬間外力に対する変位  $x_i(t)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) を足し合わせ、 $n \rightarrow \infty$  にし、式(4.2)を代入すると

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n x_i(t)$$

$$\therefore x(t) = d_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i(t) \quad (4.3)$$

となる。



瞬間外力が  $t_{i-1} \leq \tau < t_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) だけ作用した場合の  $x_i(t)$  を求めよう。  $\Delta\tau$  は微少時間であるから、その間の外力は一定  $f(\tau) = f(t_{i-1})$  と考えることができる。一定外力によって生じる速度  $\dot{x}_i(\tau)$  は、“ニュートンの運動法則”を変形した“運動量の変化は力積に等しい”ことから求めることができる。すなわち

$$m\dot{x}_i(\tau) - m\dot{x}_i(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{\tau} f(\tau) d\tau = f(t_{i-1})(\tau - t_{i-1})$$

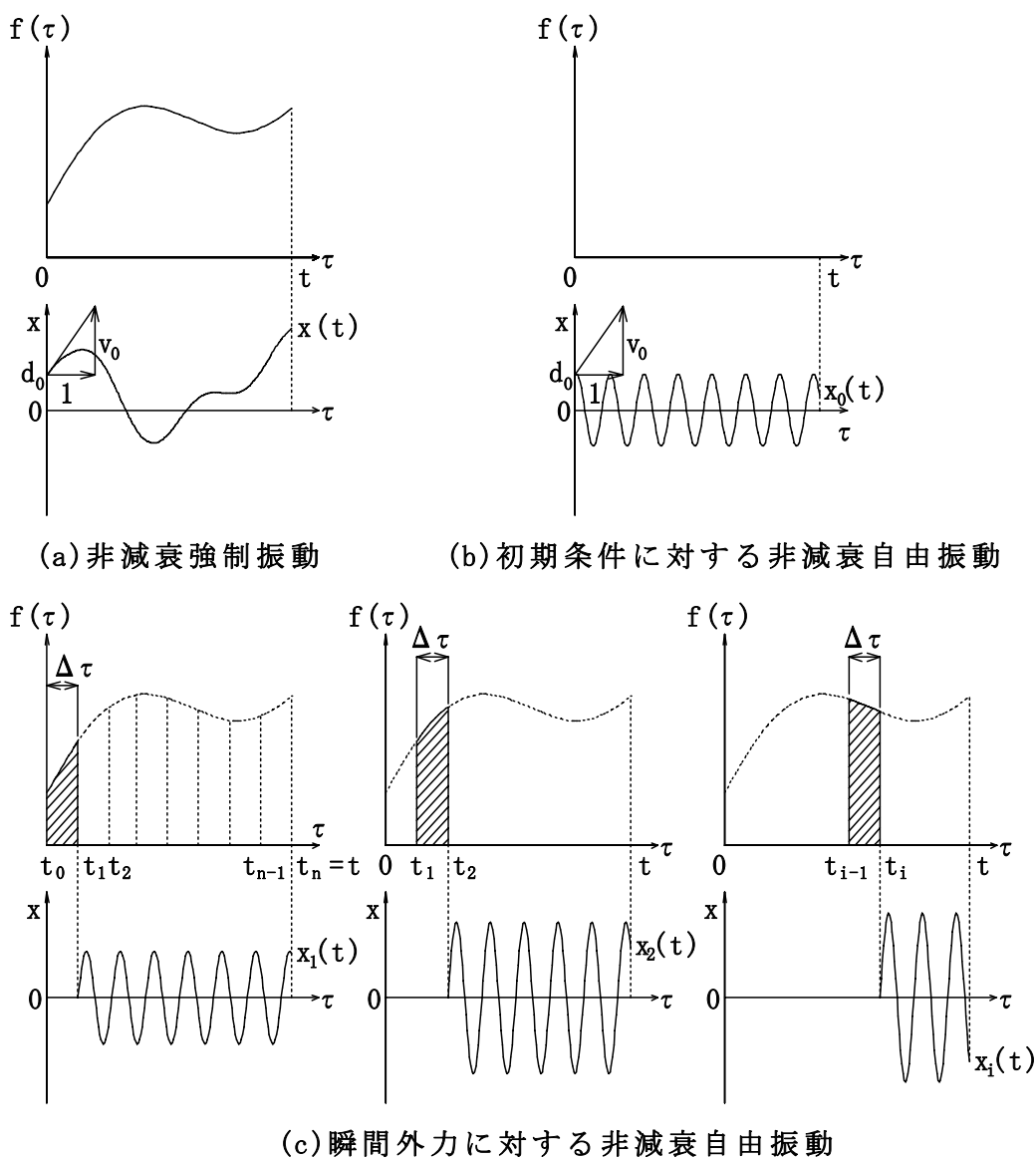


図4.1 デュアメル積分の考え方

$\dot{x}_i(t_{i-1}) = 0$  であるから

$$\dot{x}_i(\tau) = \frac{f(t_{i-1})}{m}(\tau - t_{i-1}) \quad (4.4)$$

である。変位は式(4.4)を積分して

$$\begin{aligned} x_i(\tau) &= x_i(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{\tau} \dot{x}_i(\tau) d\tau = x_i(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{\tau} \frac{f(t_{i-1})}{m}(\tau - t_{i-1}) d\tau \\ &= x_i(t_{i-1}) + \frac{f(t_{i-1})}{2m}(\tau - t_{i-1})^2 \end{aligned}$$

である。  $x_i(t_i) = 0$  であるから

$$x_i(\tau) = \frac{f(t_{i-1})}{2m}(\tau - t_{i-1})^2 \quad (4.5)$$

である。

$t_i$  における速度と変位は、式(4.4)と(4.5)に  $\tau = t_i$  を代入すると

$$\dot{x}_i(t_i) = \frac{f(t_{i-1})}{m}(t_i - t_{i-1}) = \frac{f(t_{i-1})}{m} \Delta\tau \quad (4.6)$$

$$x_i(t_i) = \frac{f(t_{i-1})}{2m}(t_i - t_{i-1})^2 = \frac{f(t_{i-1})}{2m} \Delta\tau^2 \quad (4.7)$$

となる。  $\tau > t_i$  では、図 4.1(c)の右図に示すように、  $\dot{x}_i(t_i)$  と  $x_i(t_i)$  を初期条件とした非減衰自由振動となる。時刻  $t$  の変位は、式(2.4)より

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_i(t_i) \cos \omega(t - t_i) + \frac{\dot{x}_i(t_i)}{\omega} \sin \omega(t - t_i) \\ &= \frac{f(t_{i-1}) \Delta\tau^2}{2m} \cos \omega(t - t_i) + \frac{f(t_{i-1}) \Delta\tau}{m\omega} \sin \omega(t - t_i) \end{aligned}$$

である。  $\Delta\tau \rightarrow 0$  においては、右辺の  $\Delta\tau^2$  の第 1 項は  $\Delta\tau$  の第 2 項に対して無視できる。

$$\therefore x_i(t) = \frac{f(t_{i-1}) \Delta\tau}{m\omega} \sin \omega(t - t_i) \quad (4.8)$$

時刻  $t$  の変位  $x(t)$  は、式(4.8)を(4.3)に代入して

$$x(t) = d_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{f(t_{i-1}) \Delta\tau}{m\omega} \sin \omega(t - t_i)$$

$$\therefore x(t) = d_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \quad (4.9)$$

である。右辺の第 3 項がが **デュアメル積分**(Duhamel's integral)である。

#### 例題 4.a 鉛直バネに錘を静かに載せた場合の非減衰振動

図 4.a(a)に示す鉛直バネ(バネ定数  $k$ )に, 同図(b)に示すように,  $t=0$ で質量  $m$  の錘を静かに載せた場合の振動をデュアメル積分で求めよう。

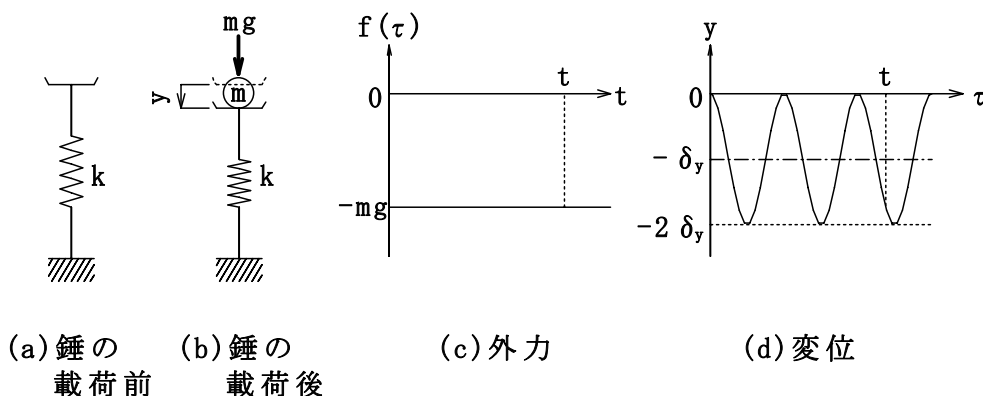


図 4. a 鉛直バネに錘を載せた場合の非減衰振動

力と変位は上方向を正とすると, 外力は, 図 4.a (c)に示すように一定で

$$f(\tau) = -mg$$

である。したがって, 変位  $y(t)$  は, 式(4.9)より

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t (-mg) \sin \omega(t-\tau) d\tau = -\frac{g}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-\tau) d\tau \\ &= -\frac{g}{\omega^2} \left| \cos \omega(t-\tau) \right|_0^t = -\frac{g}{k/m} (1 - \cos \omega t) \\ &= -\frac{mg}{k} (1 - \cos \omega t) = -\delta_s (1 - \cos \omega t), \quad \delta_s = \frac{mg}{k} \end{aligned}$$

である。  $\delta_s$  は錘を静的に載荷したときの変位である。  $y(t)$  を図 4a(d)に示す。すなわち, 変位は, 錘を載せた瞬間から固有振動数で調和振動し, 静的変位 ( $-\delta_s$ ) を中心として振幅  $\delta_s$  で振動する。

#### 4.2 減衰強制振動に対するデュアメル積分

減衰強制振動では, 初期条件に対する変位  $x_0(t)$  が, 式(2.24)より

$$x_0(t) = e^{-h\omega t} \left\{ d_0 \cos \omega_D t + \frac{v_0 + h\omega d_0}{\omega_D} \sin \omega_D t \right\} \quad (4.10)$$

である。 $t_{i-1} \leq \tau < t_i$ の瞬間外力に対する $\tau = t_i$ の変位 $x_i(t_i)$ と速度 $\dot{x}_i(t_i)$ は、 $\Delta\tau \rightarrow 0$ において減衰の影響を無視できるので、それぞれ式(4.6)と(4.7)となる。したがって、変位 $x_i(t)$ は、 $\tau > t_i$ では、式(4.6)・(4.7)の $\dot{x}_i(t_i)$ と $x_i(t_i)$ を初期条件とした減衰自由振動となるので、2次の項の初期変位 $x_i(t_i)$ を無視すると、式(2.24)より

$$x_i(t) = \frac{\dot{x}_i(t_i)}{\omega_D} e^{-h\omega(t-t_i)} \sin \omega_D(t-t_i) = \frac{f(t_{i-1})\Delta\tau}{m\omega_D} e^{-h\omega t} \sin \omega_D(t-t_i) \quad (4.11)$$

である。

時刻 $t$ の変位 $x(t)$ は、式(4.10)・(4.11)を(4.3)に代入して、積分の形にすると

$$x(t) = e^{-h\omega t} \left\{ d_0 \cos \omega_D t + \frac{v_0 + h\omega d_0}{\omega_D} \sin \omega_D t \right\} + \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t f(\tau) \cdot e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \quad (4.12)$$

となる。

### 4.3 地盤振動に対する減衰応答のデュアメル積分

地盤振動に対する減衰系の運動方程式は、減衰強制振動の運動方程式(4.12)で、初期条件 $d_0 = 0, v_0 = 0$ とし、前記したように外力 $f(t)$ を $-m\ddot{x}_g(t)$ に置き換えればよい。したがって、時刻 $t$ における変位 $x(t)$ は

$$x(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \quad (4.13)$$

である。

### 4.4 要約

不規則に変化する外力に対する応答変位の厳密解は、線形であるので、微少な時間だけ作用する外力によって静止状態から加速された自由振動を積分することによって求めることができる。これをデュアメル積分という。

## 第5章 地震応答スペクトル

この章では、古典的で初歩的な耐震設計に用いられる地震応答スペクトルの概念と設計への適用について述べる。地震応答スペクトルとは、“ある地震の地盤加速度に対する1自由度系の最大応答値”と“その系の固有周期”の関係を、減衰定数をパラメータとして図示したものである。

### 5.1 応答スペクトル

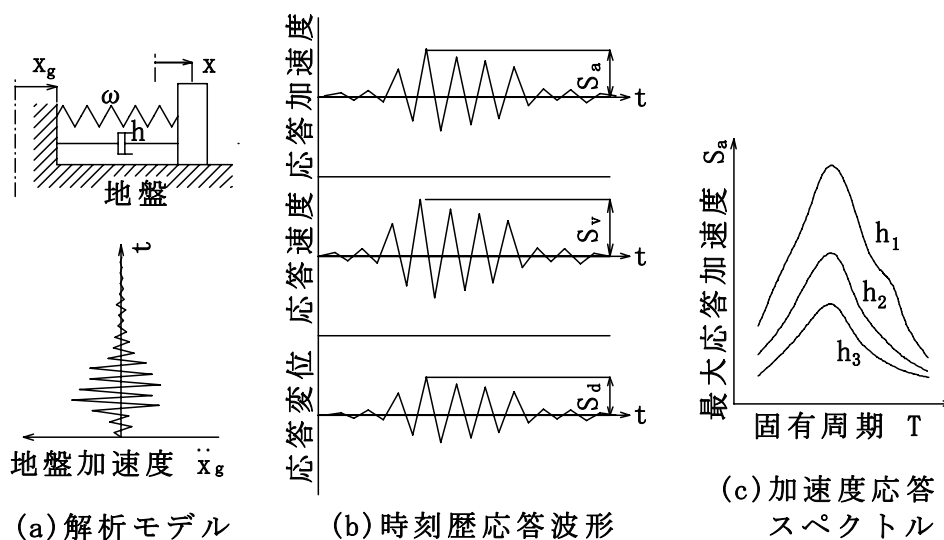


図5.1 応答スペクトルの作成手順

図5.1に応答スペクトルの作成手順を示す。同図(a)は応答スペクトルを求めるための解析モデルである。すなわち“固有円振動数 $\omega$ ，減衰定数 $h$ の1自由度系”が地盤に固定され，地盤が絶対加速度 $\ddot{x}_g(t)$ で振動する。これに対する系の時刻歴応答値(地盤に対する相対変位と相対速度，絶対加速度)を計算し，最大応答の絶対値(それぞれ $S_d, S_v, S_a$ )を求める(図5.1(b))。これらの最大応答値を $\omega$ と $h$ を変えて計算し，最大応答値と $\omega$ (通常，固有周期 $T$ )の関係を， $h$ をパラメータとしてグラフ化したものが，応答スペクトルである。通常，両対数で表示する。図5.1(c)に加速度応答スペクトルだけを示した。

最大応答値は，コンピュータの性能が高くなった現在では，第15章で述べる数値計算によって求めることができる。しかし，昔から用いられ，現在でも用いられている“最大応答変位だけを求め，それから最大応答速度と最大応答加速度を近似的に求める方

法”について述べる。

応答相対変位は式(4.13)を再掲すると

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-h^2}\omega} \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.1)$$

である。応答相対速度は、式(5.1)を微分して

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-h\omega(t-\tau)} \cos \omega_D(t-\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.2)$$

である。応答絶対加速度は式(3.21)を移項し、(5.1)・(5.2)を代入すると

$$\begin{aligned} \ddot{X}(t) &= \ddot{x}(t) + \ddot{x}_g(t) = -2h\omega\dot{x} - \omega^2 x \\ &= \frac{1-2h^2}{\sqrt{1-h^2}} \omega \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \\ &\quad + 2h\omega \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-h\omega(t-\tau)} \cos \omega_D(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.3)$$

となる。

最大応答変位は式(5.1)から

$$S_d(h, T) = \frac{1}{\omega_D} \left| \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (5.4)$$

となり、減衰定数  $h$  と固有振動数  $\omega$  (すなわち固有周期  $T$ ) の関数となる。 $h$  をパラメータとして、最大応答変位と固有周期の関係を描いた図が、**変位応答スペクトル** (displacement response spectrum) である。

速度と加速度についても、同様に計算して、応答スペクトルを求めることができる。しかし、その場合、時間がかかるので、近似的にそれらを求める方法がある。実際の構造物の減衰定数  $h$  は、1 に比べて十分に小さいので、式(5.2)・(5.3)の右辺の第2項は無視でき、また

$$\sqrt{1-h^2} \approx 1, \quad 1-2h^2 \approx 1 \quad (5.5)$$

とみなせるので、最大応答速度と最大応答加速度は、それぞれ

$$S_v(h, T) \approx \left| \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-h\omega(t-\tau)} \cos \omega_D(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (5.6)$$

$$S_a(h, T) \approx \omega \left| \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \cdot e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (5.7)$$

となる。

式(5.6)と(5.4)を比較し、 $\cos$ と $\sin$ の違いを無視すると

$$S_v(h, T) \approx \omega_D S_d(h, T) = \sqrt{1-h^2} \omega S_d(h, T) \approx \omega S_d(h, T) \quad (5.8)$$

となる。式(5.7)と(5.4)を比較し、同様に

$$S_a(h, T) \approx \omega^2 S_d(h, T) \quad (5.9)$$

となる。

これらのスペクトルを、それぞれ**擬似速度応答スペクトル**(pseudo-velocity response spectrum)および**擬似加速度応答スペクトル**(pseudo-velocity response spectrum)という。これらは厳密な応答スペクトルではない。しかし、ほとんどの場合、応答スペクトルは、それほど厳密な用いられ方をしないので、それで十分である。

## 5.2 設計応答スペクトル

応答スペクトルを用いた代表的な耐震設計法を述べる。

### (1) 設計加速度応答スペクトルの作成

過去に測定された地震記録を参考として、複数の地盤加速度を作成する。これらに対する加速度応答スペクトルを計算し、ほぼそれらを包絡する“**図 5.2 に示すような直線で構成する設計応答加速度スペクトル**”を設定する。

実際に動的解析によって構造断面を決定しようとすると、ある構造条件で、異常に大きな断面になる場合がある。その理由は、動的解析用の地盤加速度は、通常、直線で構成された設計加速度応答スペクトルに基づいて作成されるために、固有周期のある範囲で設計加速度応答スペクトルが、安全側に設定されている場合があるからである。これは、動的解析そのもの問題ではなく、それに用いる地盤加速度の問題ではあるが、動的解析の結果を機械的に信じるべきではない。

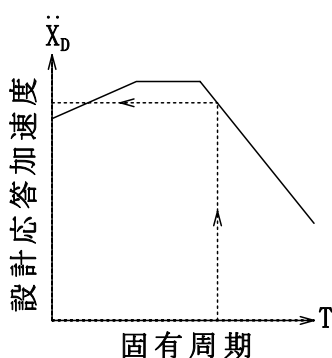


図 5.2 設計応答加速度スペクトル

## (2) 応答スペクトルを用いた設計

構造物は、一般に多自由度系である。この系が、1自由度系で近似できる場合は、以下のように応答スペクトルを用いて設計することができる。

### (a) 応答が弾性範囲の場合

1自由度系に置き換え、その固有周期  $T$  をレーリー法(参考文献[2.2])すなわち静的フレーム法によって求める。図 5.2 に示す設計加速度応答スペクトルから、それに対応する設計応答加速度  $\ddot{X}_D$  を求める。この加速度による慣性力  $\{-m\ddot{X}_D\}$  が静的に作用するとして、部材断面を設計する。

### (b) 応答が塑性域の場合

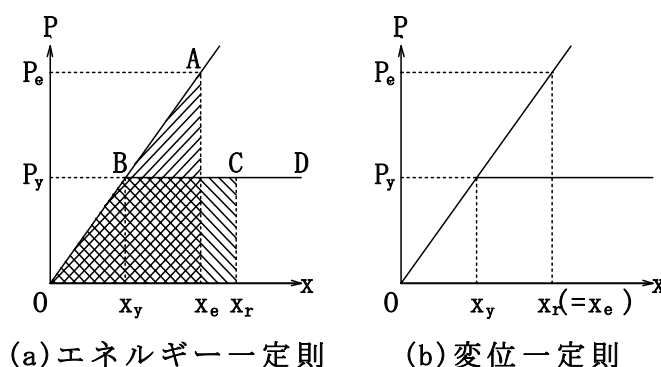


図 5.3 エネルギー一定則と変位一定則

図 5.3(a)に示すように、置き換えた 1 自由度系の荷重・変位関係が弾完全塑性体(折れ線  $OBD$ )と仮定する。すなわち、変位が  $x < x_y$  の範囲において荷重・変位関係が線形であり、 $x = x_y$  で降伏し、 $x > x_y$  では荷重が増加しないとする( $P = P_y$ )。この 1 自由度系について、荷重・変位関係が線形と仮定して(a)の方法で求めた変位を  $x_e$ 、弾完全塑



性体と仮定して非線形動的解析で求めた最大応答変位を  $x_r$  すると、①固有周期が比較的小さい場合(約2s以下), 図 5.3(a)に示すように, ひずみエネルギーである三角形  $Ox_eA$  と台形  $Ox_rCB$  が等しい傾向がある, ②固有周期が比較的大きい場合は, 図 5.3(b)に示すように,  $x_r = x_e$  となる傾向がある。前者は**エネルギー一定則**(property of energy conservation), 後者は**変位一定則**(property of displacement conservation)という。応答が塑性範囲の場合は, これらの一定則によって最大応答変位  $x_r$  を求め, それが許容変位  $x_a$  以下であるとその断面が合格であると判定する。

**例題 5.a エネルギー一定則**

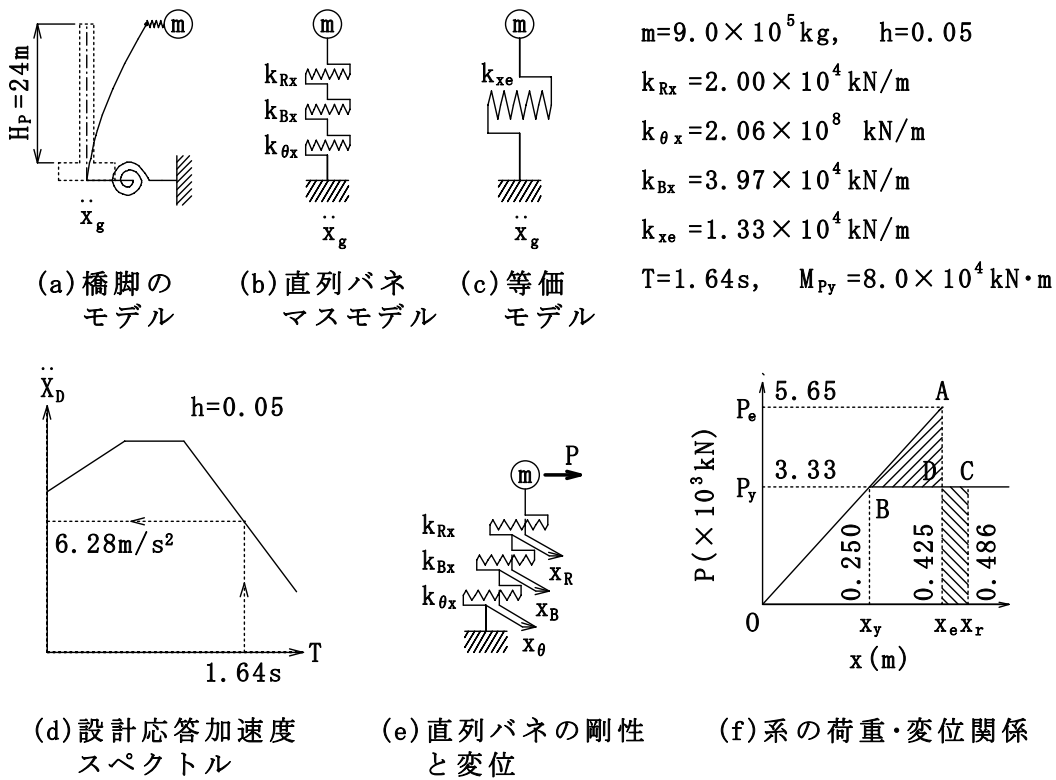


図 5.a エネルギー一定則による耐震設計(橋脚モデル, 図 1. b 参照)

例題 1.b において, 地震による地盤振動を受けていたとする(図 5.a(a), (b)と(c))。地震加速度応答スペクトル(道路橋示方書に示されている地震タイプ II の I 種地盤に対するスペクトル)を同図(d)に示す。これに対する橋脚の柱の最大応答変位  $x_{Bx}$  を求めよう。固有周期  $T = 1.64 \text{ s} < 2 \text{ s}$  であるので, 比較的に周期が小さいとしてエネルギー一定則を

適用する。図 5.a に計算条件を示す。等価せん断バネ定数  $k_{xe}$  は例題 1.b, 固有周期  $T$  は例題 2.a で求めた値である。ただし, 減衰定数は  $h = 0.05$  とする。

まず, この 1 自由度系の荷重・変位曲線を定めよう。柱は弾完全塑性体, ゴム支承と地盤バネは弾性体とする。柱下端の降伏モーメント  $M_{Py} = 8.0 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}$  とすると, 降伏荷重は

$$P_y = M_{Py} / H_P = 8.0 \times 10^4 / 24 = 3.33 \times 10^3 \text{ kN}$$

である。柱曲げおよび系の降伏変位は, それぞれ

$$x_{By} = P_y / k_{Bx} = 3.33 \times 10^3 / 3.97 \times 10^4 = 0.0839 \text{ m}$$

$$x_y = P_y / k_{xe} = 3.33 \times 10^3 / 1.33 \times 10^4 = 0.250 \text{ m}$$

である。したがって, 荷重変位曲線は図 5.a(f) のとおりとなる。

固有周期  $T = 1.64 \text{ s}$  に対する最大応答加速度は, 図 5.a(d) より

$$\ddot{X}_D = 6.28 \text{ m/s}^2$$

である。最大慣性力の大きさは

$$P_e = |-m\ddot{X}_D| = 9.0 \times 10^5 \times 6.28 = 5.65 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 5.65 \times 10^3 \text{ kN}$$

である。この荷重に対する系の変位は

$$x_e = P_e / k_{xe} = 5.65 \times 10^3 / 1.33 \times 10^4 = 0.425 \text{ m}$$

である。

エネルギー一定則に基づいて三角形  $Ox_eA$  と台形  $Ox_rCB$  が等しいことは, 三角形  $ABD$  と長方形  $x_e x_r CD$  が等しいことである。  $w \equiv x_r - x_e$  とおくと

$$3.33 \times 10^3 w = (5.65 - 3.33) \times 10^3 \times (0.425 - 0.250) / 2$$

$$\therefore w = 0.0610 \text{ m}, \quad x_r = x_e + w = 0.425 + 0.0610 = 0.486 \text{ m}$$

である。地盤の回転バネの剛体回転の変位は小さいので無視する。ゴム支承の変位は

$$x_{Rx} = P_y / k_{Rx} = 3.33 \times 10^3 / 2.00 \times 10^4 = 0.167 \text{ m}$$

であるから, 柱曲げによる変位は

$$x_{Br} = x_r - x_{Rx} = 0.486 - 0.167 = 0.319 \text{ m}$$

である。降伏変位に対する比率は

$$x_{Br}/x_{Py} = 0.319/0.0839 = 3.80$$

である。すなわち、柱は降伏変位の 3.8 倍変位する。柱の許容変位を降伏変位の 5 倍とすると、この断面は合格である。

### 5.3 要約

地震応答スペクトルとは、ある地震による地盤振動(通常、地盤加速度で与えられる)に対して、1 自由度系の最大応答値(相対変位、相対速度、絶対加速度)と固有周期の関係を、減衰定数をパラメータとしてグラフ化したものである。

地震加速度応答スペクトルを用いる設計は、構造物を 1 自由度系に置き換えて、固有周期を計算し、その設計加速度応答スペクトルから設計応答加速度を求め、それによる慣性力が静的に構造物に作用するとして、部材断面を決定する方法である。

## 第 2 部の参考文献

- [2.1] 矢嶋信男, (2000), “常微分方程式”, 岩波書店。
- [2.2] Mario Paz, (1997), “Structural Dynamics”, Chapman & Hall。
- [2.3] 柴田明徳, (2000), “最新耐震構造解析”, 森北出版株式会社。
- [2.4] 大崎順彦, (2000), “新・地震動のスペクトル解析入門”, 鹿島出版会。
- [2.5] 松平精, (1973), “基礎振動学”, 現代工学社。

## 第3部 多自由度系のモード解析

### 第3-1部 行列を用いない“モード解析とその用語”の説明

多自由度系の運動方程式は、連立微分方程式である。その解析手法である**モード解析**の最も簡潔な説明は、“連立微分方程式を変数変換と式の重ね合わせによって連成しない方程式に変えて解く方法”である。入門者は、この意味をしっかりと認識することが、理解の早道である。この部では、“モード解析の概念とその用語”についてやさしく説明する。そのために、①行列の数学的手法を用いない、②解析モデルとして多自由度系で最も単純な“せん断建物モデル”を用いる。

しかし、一般性のあるモード解析理論を理解するためには、“行列”の数学的知識が必要である。その理論では、**直交性**という用語が頻繁に用いられる。この直交性は、ベクトルに関してしっかりとした概念を持ち合わせていない人にとって、わかりにくい。この部では、行列の数学的知識を学ぶ準備段階として、**ベクトル**についても説明する。

## 第6章 モード解析の概念

この章では、**モード解析**(modal analysis)について具体性のある概念を把握できるように、説明において物理的な意味を重視する。

多自由度系の動的解析では、“減衰振動に対しても、ある理由(詳細は第11章)から一般に、非減衰振動と全く同じ変数変換と式の重ね合わせによって、連成しない方程式に変えることができる”と仮定する。したがって、モード解析の概念を考察する場合、非減衰振動について論ずれば十分である。この章では、一般性を持たせるために、外力も考慮した非減衰振動について論じる。

2層の**せん断建物モデル**を図6.1(a)に示す。この部で、せん断建物モデルを用いる意義は、モデルが単純なので、モード解析の概念を説明するために適切

であるからである。このモデルは、例題 1.a で述べたように、一般的に図 6.1(b) に示すせん断バネ・マスモデルに置き換えることができる。この本では、以降、せん断建物モデルの図を単純化するために、図 6.1 (c)に示すように模式的に表現する。この図では、各節点の回転が拘束されていることを明確にするような表現になっている。

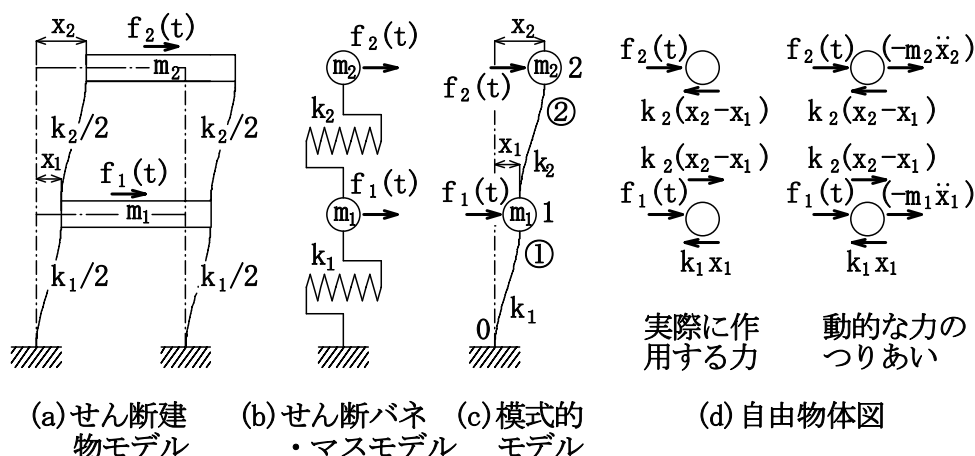


図6.1 せん断建物モデル

図 6.1(d) に自由物体図を示す。左の図は、各節点に実際に作用している力を示している(仮想の力である慣性力は含まれていない)。“ニュートンの運動の第 2 法則” から、各節点における力と加速度の関係すなわち運動方程式は

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = f_1(t) - k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = f_2(t) - k_2 (x_2 - x_1) \end{cases} \quad (6.1)$$

である。ここで、 $(x_1, x_2)$  および  $(m_1, m_2)$  は、それぞれ節点 1 と節点 2 の変位および質量である。 $k_1$  と  $k_2$  は要素 1 と要素 2 の剛性である。 $f_1(t)$  と  $f_2(t)$  は、節点 1 と節点 2 に作用する外力である。

式(6.1)の“第 1 式の右辺の第 3 項”と“第 2 式の右辺の第 2 項”が、要素 2 の復元力で、2 つの節点に相互に作用する力を表わしている。すなわち、それらが、2 つの方程式を連成させている項、言い換えれば、連立微分方程式にしている項である。それらの項は、“作用反作用の法則”を満足し、大きさが等しく、方向が反対である。図 6.1(d)の右の図には、“ダランベールの原理”に基づいた“動的な力のつり合い関係”を示した。

式(6.1)を振動学で慣習的に扱う形式になおすと

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = f_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = f_2(t) \end{cases} \quad (6.2)$$

となる。この連立微分方程式は、節点の数(自由度)が多くなると、このままでは簡単に解くことができない。

### 6.1 モード解析で“連成しない方程式に変えて解く仕組み”

モード解析において、連立微分方程式(6.2)を“変数変換と式の重ね合わせ”によって“連成しない方程式に変える仕組み”を述べる。式(6.2)は、 $x_1, x_2$ とそれらの2次導関数について線形(linear)であるので、2つの式を適当に重ね合わせることによって、以下のような形に変えることができる。

$$\begin{cases} m_1^*(a_1 \ddot{x}_1 + b_1 \ddot{x}_2) + k_1^*(a_1 x_1 + b_1 x_2) = f_1^*(t) \\ m_2^*(a_2 \ddot{x}_1 + b_2 \ddot{x}_2) + k_2^*(a_2 x_1 + b_2 x_2) = f_2^*(t) \end{cases} \quad (a_1, b_1, a_2, b_2 \text{ は定数}) \quad (6.3)$$

ここで、 $x_1, x_2$ から $u_1, u_2$ への変数変換

$$\begin{cases} u_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 \\ u_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 \end{cases} \quad (6.4)$$

を考えると、2次導関数は

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 = a_1 \ddot{x}_1 + b_1 \ddot{x}_2 \\ \ddot{u}_2 = a_2 \ddot{x}_1 + b_2 \ddot{x}_2 \end{cases} \quad (6.5)$$

となる。式(6.4)・(6.5)を(6.3)に代入すると、連成していない方程式群

$$\begin{cases} m_1^* \ddot{u}_1 + k_1^* u_1 = f_1^*(t) \\ m_2^* \ddot{u}_2 + k_2^* u_2 = f_2^*(t) \end{cases} \quad (6.6)$$

を得る。したがって、連成しない微分方程式を得るためには、変数変換式(6.4)の係数 $a_1, b_1, a_2, b_2$ を求めればよい。なお、式(6.2)が、1次導関数(減衰力)を含んだ線形な連立微分方程式である場合、一般に連成しない方程式に変えることができない。

それでは、実際に係数 $a_1, b_1, a_2, b_2$ を求めてみよう。解析条件は、計算が煩雑にならないように、図6.2(a)に示すように、 $m_1 = 2m$ 、 $m_2 = m$ および $k_1 = k_2 = k$ とする。したがって、運動方程式(6.2)は下式となる。

$$\begin{cases} 2m \ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = f_1(t) \\ m \ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = f_2(t) \end{cases} \quad (6.7)$$

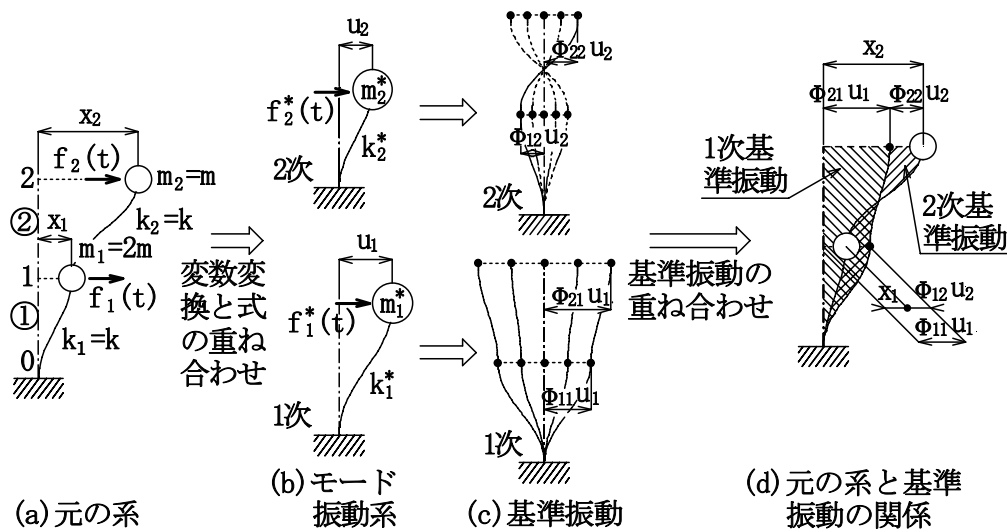


図6.2 モード解析の概念図

まず、係数  $a_1, b_1$  を求めてみよう。式(6.7)の 2 つの式の重ね合わせにおいて、2 次導関数を  $\ddot{u}_1 = a_1\ddot{x}_1 + b_1\ddot{x}_2$  の形(式(6.5)の第 1 式)にするために、式(6.7)の第 1 式と第 2 式にそれぞれ  $a_1/2$  と  $b_1$  を乗じて、足し合わせればよい。すなわち

$$m(a_1\ddot{x}_1 + b_1\ddot{x}_2) + k \left\{ (a_1 - b_1)x_1 + \left( -\frac{a_1}{2} + b_1 \right) x_2 \right\} = \frac{a_1}{2} f_1(t) + b_1 f_2(t)$$

$$\therefore \underbrace{m(a_1\ddot{x}_1 + b_1\ddot{x}_2)}_{\ddot{u}_1} + k \left( 1 - \frac{b_1}{a_1} \right) \underbrace{\left\{ a_1 x_1 + \frac{a_1(-a_1 + 2b_1)}{2(a_1 - b_1)} x_2 \right\}}_{u_1} = \frac{a_1}{2} f_1(t) + b_1 f_2(t) \quad (6.8)$$

となる。左辺の第 2 項の  $\{ \}$  内を  $u_1 = a_1x_1 + b_1x_2$  の形(式(6.4) の第 1 式)にするためには、 $x_2$  にかかる係数が  $b_1$  に一致すればよいから

$$\frac{a_1(-a_1 + 2b_1)}{2(a_1 - b_1)} = b_1, \quad \therefore b_1^2 = \frac{1}{2} a_1^2 \quad \therefore b_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} a_1$$

である。一見、解が 2 つあるように見えるが、式(6.4)の第 1 式と第 2 式の形が同じであるので、 $(a_1, b_1)$  と  $(a_2, b_2)$  を同時に求めていたのである。したがって、係数の解は

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1, \quad b_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} a_2 \quad (6.9)$$

である。式からわかるように、係数  $a_1$  と  $b_1$  あるいは  $a_2$  と  $b_2$  は、比率だけが一定な条件で任意に定めることができる。

(6.9)を(6.4)に代入すると、変数の変換式

$$\begin{cases} u_1 = a_1 x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 x_2 \\ u_2 = a_2 x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} a_2 x_2 \end{cases} \quad (6.10)$$

が求まる。式(6.9)を(6.8)に代入すると、2つの連成しない方程式

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + k\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)u_1 = \frac{a_1}{2}f_1(t) + \frac{a_1}{\sqrt{2}}f_2(t) \\ m\ddot{u}_2 + k\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)u_2 = \frac{a_2}{2}f_1(t) - \frac{a_2}{\sqrt{2}}f_2(t) \end{cases} \quad (6.11)$$

を得る。さらに変形すると

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = \frac{f_1^*(t)}{m} \\ \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = \frac{f_2^*(t)}{m} \end{cases} \quad (6.12)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{k}{m}} \quad (6.13)$$

$$f_1^*(t) = \frac{a_1}{2}f_1(t) + \frac{a_1}{\sqrt{2}}f_2(t), \quad f_2^*(t) = \frac{a_2}{2}f_1(t) - \frac{a_2}{\sqrt{2}}f_2(t) \quad (6.14)$$

となる。式(6.11)あるいは(6.12)は、連成していないので容易に $u_1, u_2$ の解を求めることができる。

元の変数 $x_1, x_2$ の解を求めるには、 $u_1, u_2$ から $x_1, x_2$ へ逆に変数変換してやればよい。その変換式は、式(6.10)を、 $x_1$ と $x_2$ について解くことによって、求めることができる。すなわち

$$\begin{cases} x_1 = \phi_{11}u_1 + \phi_{12}u_2 \\ x_2 = \phi_{21}u_1 + \phi_{22}u_2 \end{cases} \quad (6.15)$$

$$\phi_{11} = \frac{1}{2a_1}, \quad \phi_{12} = \frac{1}{2a_2}, \quad \phi_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}a_1}, \quad \phi_{22} = -\frac{1}{\sqrt{2}a_2} \quad (6.16)$$

である。同様に、係数 $\phi_{11}$ と $\phi_{21}$ あるいは $\phi_{12}$ と $\phi_{22}$ は、比率だけ一定な条件で任意に定めることができる。



ここで、『係数“ $\phi_1$ と $\phi_2$ あるいは $\phi_1$ と $\phi_2$ ”すなわち“ $a_1$ と $b_1$ あるいは $a_2$ と $b_2$ ”は、比率だけ一定な条件で任意に定めることができる』すなわち『式(6.10)・(6.11)の $a_1, a_2$ は任意に定めることができる』という意味について考察してみよう。式(6.10)・(6.11)の $a_1, a_2$ がある値に設定し、任意の定数 $\lambda_1$ と $\lambda_2$ を、それぞれを式(6.10)・(6.11)の第1式と第2式の両辺に乗じると

$$\begin{cases} (\lambda_1 u_1) = (\lambda_1 a_1) x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_1 a_1) x_2 \\ (\lambda_2 u_2) = (\lambda_2 a_2) x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_2 a_2) x_2 \end{cases} \quad (6.17)$$

$$\begin{cases} m(\lambda_1 \ddot{u}_1) + k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) (\lambda_1 u_1) = \frac{(\lambda_1 a_1)}{2} f_1(t) + \frac{(\lambda_1 a_1)}{\sqrt{2}} f_2(t) \\ m(\lambda_2 \ddot{u}_2) + k \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) (\lambda_2 u_2) = \frac{(\lambda_2 a_2)}{2} f_1(t) - \frac{(\lambda_2 a_2)}{\sqrt{2}} f_2(t) \end{cases} \quad (6.18)$$

となる。新しい係数を $A_1 \equiv \lambda_1 a_1, A_2 \equiv \lambda_2 a_2$ とし、それに対応した新しい変数を $U_1 \equiv \lambda_1 u_1, U_2 \equiv \lambda_2 u_2$ とすると、変換式(6.17)と微分方程式(6.18)は、それぞれ

$$\begin{cases} U_1 = A_1 x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} A_1 x_2 \\ U_2 = A_2 x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} A_2 x_2 \end{cases} \quad (6.19)$$

$$\begin{cases} m\ddot{U}_1 + k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) U_1 = \frac{A_1}{2} f_1(t) + \frac{A_1}{\sqrt{2}} f_2(t) \\ m\ddot{U}_2 + k \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) U_2 = \frac{A_2}{2} f_1(t) - \frac{A_2}{\sqrt{2}} f_2(t) \end{cases} \quad (6.20)$$

となる。式の誘導からわかるように、係数の値を変えると、新しい変数がそれに比例して変化するので、元の変数は変動しない。

以上の解析について、図 6.2 の“モード解析の概念図”を参考にしながら、考察してみよう。

① **一般化座標** 自由度  $r$  の系で、 $r$  個の互いに独立な変数によって、その系の状態が完全に決定できるとき、それらの変数を一般化座標 (generalized

coordinate)とよぶ。したがって、元の変位の組  $(x_1, x_2)$  は一般化座標である。新しい変数の組  $(u_1, u_2)$  は、系の状態を直接的に表わしているわけではないが、やはり一般化座標である。座標とよぶ理由は、それによって座標系が構成されるからである(詳細は第 19 章)

② **基準座標とモード振動系** 連立微分方程式を“変数変換と式の重ね合わせ”によって連成しない方程式に変えたとき、その新しい変数  $u_1$  と  $u_2$  を**基準座標**(normal coordinate)とよぶ。したがって、 $u_1, u_2$  は一般化座標であるとともに**基準座標**である。

連成していない方程式(6.11)すなわち基準座標  $u_1$  と  $u_2$  に対する方程式群は、それぞれ 1 自由度系の運動方程式の形態をなしている。したがって、 $u_1$  と  $u_2$  は、図 6.2(b)に示すように、それぞれが動的な力がつり合った 1 自由度系の変位とみなすことができる。これらの系を、**モード振動系**とよぶことにする。2 つのモード振動系は、それらの方程式からわかるように、元の系に対する固有の系であり、1 自由度系でもあるので、式(6.13)に示すように、固有円振動数  $\omega_1, \omega_2$  を持つ。基準座標とモード振動系は、固有円振動数の小さい方から、1 次、2 次、・・・とよぶ。モード振動系および“その変位である基準座標”は、理論上の概念であるが、連成振動を理論的に扱うために大変有効である。

③ **基準振動** 元の系の変位を、以下に示すように、基準座標  $u_1$  と  $u_2$  に対応する変位に分離して考えると、式(6.15)より

$$\begin{aligned} x_1 &= \underbrace{\phi_{11}u_1}_{1\text{次基準振動}} + \underbrace{\phi_{12}u_2}_{2\text{次基準振動}} \\ x_2 &= \underbrace{\phi_{21}u_1}_{1\text{次基準振動}} + \underbrace{\phi_{22}u_2}_{2\text{次基準振動}} \end{aligned}$$

である。それぞれの振動は、図 6.2(c)に示すように、常に一定な形状で振動する。 $u_1$  と  $u_2$  に対応する振動を、それぞれ 1 次と 2 次**基準振動**(normal vibration)あるいは**モード振動**(modal vibration)とよぶ。すなわち、元の系の振動は、図 6.2(d)に示すように、互いに連成していない基準振動によって構成されており、それぞれの基準振動は固有な振動形と固有円振動数を持っている。

図 6.3 は、図 6.2 の問題で外力を 0 とした場合(式(6.7)で  $f_1(t) = f_2(t) = 0$ )すなわち自由振動(元の変位)の解析結果である。初期条件を  $x_1 = 0.25, x_2 = 1.0$  とした。図には基準振動も示してある。これらの基準振動は、非減衰自由振動なの

で、調和振動で、それらを足し合わせたのが元の変位である。

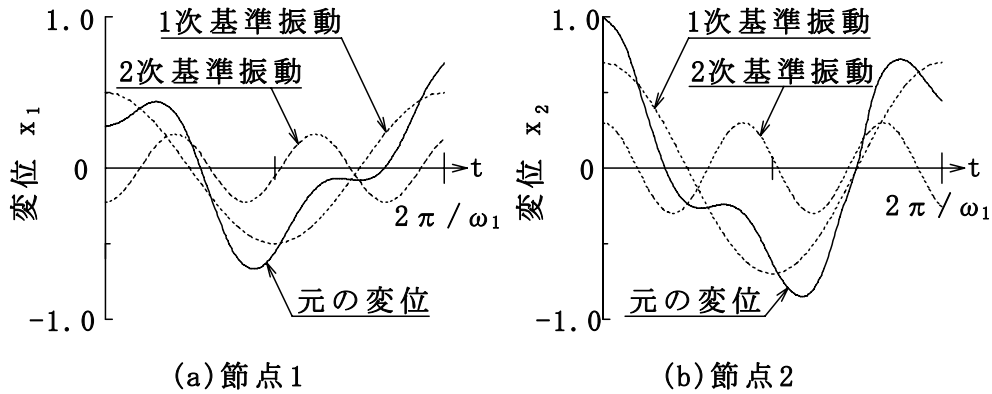


図6.3 元の変位と基準振動の関係

④ モードベクトル 基準振動の振動形を表わす列ベクトル

$$\begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2a_1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}a_1} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2a_2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}a_2} \end{Bmatrix}$$

は、1次、2次のモードベクトル(modal vector)、基準モード(normal mode)、モード形(modal shape)あるいは単にモード(mode)という。この本では、標準形固有値問題の固有ベクトル(eigenvector)と区別するために、以降、モードベクトルとよぶことにする。

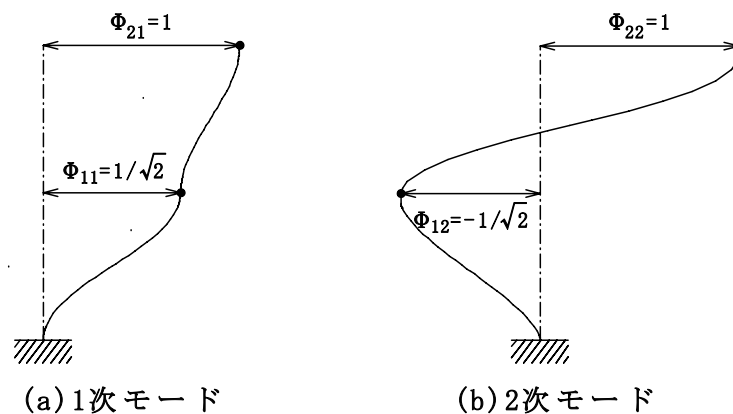


図6.4 最大の成分を1としたモード図

モードベクトルの成分は、上記のように、比率だけ一定の条件で任意の値をとることができる。成分の値を定めるために、通常、各モードベクトルで、①

大きい方の成分を 1 にする方法，②後で述べる**正規化**する方法が用いられる。ここでは，①の方法を用いると，1次と2次モードベクトルは次式となる。

$$\begin{cases} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{cases} = \begin{cases} 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{cases} = \begin{cases} -1/\sqrt{2} \\ 1 \end{cases}$$

これを図示したのが，**モード図**である(図 6.4)。これは図 6.2(c)に示す基準振動の振動形を表わし，動的解析プログラムを用いて解析する場合，入力データの正誤の判定や地震時に大きな応答が生じる基準振動の把握などに用いられる重要な図である。なお，モード解析の名称は，以上のモードという名に起因する。

### ⑤ “基準振動”と“モード振動系の振動”の相違

元の系の振動(図 6.2 (a)あるいは(d))およびモード振動系の振動(同図(b))が，各節点で動的な力がつり合っている系の振動であるのに対して，同図(d)に示す基準振動は，そのような系の振動ではなく，単に元の振動を基準振動に分離できることを表わしているにすぎない。

## 6.2 モード解析の物理的な意味

モード解析について，さらに深く理解するために，通常のモード解析の手順を追って，その物理的な意味を考察してみよう。

### (1) 固有値解析

基準座標  $u_1, u_2$  と元の変数  $x_1, x_2$  の変換式(6.15)を再掲すると

$$\begin{cases} x_1 = \phi_{11}u_1 + \phi_{12}u_2 \\ x_2 = \phi_{21}u_1 + \phi_{22}u_2 \end{cases} \quad (6.21)$$

である。“モードベクトル  $(\phi_{11}, \phi_{21}), (\phi_{12}, \phi_{22})$ ” と，“モード振動系の固有円振動数  $\omega_1, \omega_2$ ” を求めることを**固有値解析**(eigenvalue analysis)という。この解析では，前節の計算過程からわかるように，外力は関与しないので，非減衰自由振動について解けばよい。

非減衰自由振動の運動方程式は，式(6.7)から外力を除いた

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

である(図 6.2(a)参照)。モード振動系の変位  $u_1, u_2$  (図 6.2(b)参照)は，それぞれ1自由度系の非減衰自由振動であるので，それらの一般解は，式(2.8)より以下の

ように表わすことができる。

$$u_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \quad u_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad (6.23)$$

ここで、 $A_1, A_2, \theta_1$  と  $\theta_2$  は初期条件から決まる定数である。(6.23)式を(6.21)に代入すると

$$\begin{cases} x_1 = \phi_{11} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + \phi_{12} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \\ x_2 = \phi_{21} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + \phi_{22} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \end{cases} \quad (6.24)$$

となる。両式を2回微分すると以下の式を得る。

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\phi_{11} \omega_1^2 A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - \phi_{12} \omega_2^2 A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \\ \ddot{x}_2 = -\phi_{21} \omega_1^2 A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - \phi_{22} \omega_2^2 A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \end{cases} \quad (6.25)$$

式(6.24)・(6.25)を(6.22)に代入すると

$$\begin{cases} \left\{ 2(-m\omega_1^2 + k)\phi_{11} - k\phi_{21} \right\} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \\ \quad + \left\{ 2(-m\omega_2^2 + k)\phi_{12} - k\phi_{22} \right\} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) = 0 \\ \left\{ -k\phi_{11} + (-m\omega_1^2 + k)\phi_{21} \right\} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \\ \quad + \left\{ -k\phi_{12} + (-m\omega_2^2 + k)\phi_{22} \right\} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) = 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

となる。これらの式が、時刻  $t$  にかかわらず成り立つためには

$$\begin{cases} 2(-m\omega_1^2 + k)\phi_{11} - k\phi_{21} = 0, & 2(-m\omega_2^2 + k)\phi_{12} - k\phi_{22} = 0 \\ -k\phi_{11} + (-m\omega_1^2 + k)\phi_{21} = 0, & -k\phi_{12} + (-m\omega_2^2 + k)\phi_{22} = 0 \end{cases}$$

でなければならない。これらの  $\phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{21}, \phi_{22}$  に関する連立1次方程式は、以下のように、 $\phi_{11}, \phi_{21}$  と  $\phi_{12}, \phi_{22}$  に関する2つの連立1次方程式

$$\begin{cases} 2(-m\omega_1^2 + k)\phi_{11} - k\phi_{21} = 0 \\ -k\phi_{11} + (-m\omega_1^2 + k)\phi_{21} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(-m\omega_2^2 + k)\phi_{12} - k\phi_{22} = 0 \\ -k\phi_{12} + (-m\omega_2^2 + k)\phi_{22} = 0 \end{cases}$$

に分離することができる。この2つは全く同じ連立1次方程式であるので、あらためて  $\omega_1$  と  $\omega_2$  を  $\omega$  に、 $\phi_{11}$  と  $\phi_{12}$  を  $\phi_1$  に、 $\phi_{21}$  と  $\phi_{22}$  を  $\phi_2$  に置き換えると、以下のように、両式は1つの連立1次方程式に統合される。

$$\begin{cases} 2(-m\omega^2 + k)\phi_1 - k\phi_2 = 0 \\ -k\phi_1 + (-m\omega^2 + k)\phi_2 = 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

この  $\phi_1, \phi_2$  に関する連立同次方程式が、 $\phi_1 = \phi_2 = 0$  (自明の解, 振動しない解) 以外の解(振動する解)が存在する条件は、係数行列の行列式が 0 となる場合である(第 8 章参照)。すなわち

$$\begin{vmatrix} 2(-m\omega^2 + k) & -k \\ -k & -m\omega^2 + k \end{vmatrix} = 0 \quad (6.28)$$

である。この行列式を展開し、因数分解すると

$$\left(m\omega^2 - k + \frac{k}{\sqrt{2}}\right) \left(m\omega^2 - k - \frac{k}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

となる。すなわち、 $\omega$  は 2 つ解があり

$$\omega_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{k}{m}} \quad (6.29)$$

それぞれが 1 次と 2 次モード振動系の固有円振動数である。

連立同次方程式(6.27)の第 1 式と第 2 式は、係数行列の行列式が 0 であるので、同一の式である。第 2 式を変形すると

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{-m\omega^2 + k}{k} \quad (6.30)$$

となる。式(6.29)の  $\omega_1$  と  $\omega_2$  を代入すると、1 次と 2 次モードベクトルは

$$\begin{matrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{matrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \begin{matrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{matrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (6.31)$$

となる。 $\phi$  の添え字は、前が節点番号を、後がモードベクトルの次数(以降、モードの次数)を表わす。モードベクトルの大きい成分を 1 にすると、1 次および 2 次モードベクトルは次式となる。

$$\begin{cases} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{cases} = \begin{cases} 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{cases} = \begin{cases} -1/\sqrt{2} \\ 1 \end{cases} \quad (6.32)$$

## (2) 連成しない方程式の構築

モード解析において、固有値解析で求めた変数変換式(6.15)を非減衰強制振動の運動方程式(6.7)に代入後、“式を重ね合わせることによって、連成しない方程式(モード振動系の運動方程式)に変える仕組み”の物理的な意味は、**仮想仕事の原理**(principle of virtual work)を適用するとわかりやすい。この原理は“平衡状態にある(力が釣り合っている)系に、拘束条件を満足する任意の微小

変位(仮想変位)を与える間に、その系に作用しているすべての力のなす仕事(仮想仕事)は 0 である”。この仕事には拘束力は関与しない。なぜならば、拘束力は、拘束条件を満足する変位に対して常に直角に働くからである。この原理は、力がつり合っているので、至極当然のことをいっているにすぎないが、解析によっては強力な手段となる。この原理は、動的な力がつり合っている系にも適用できる。

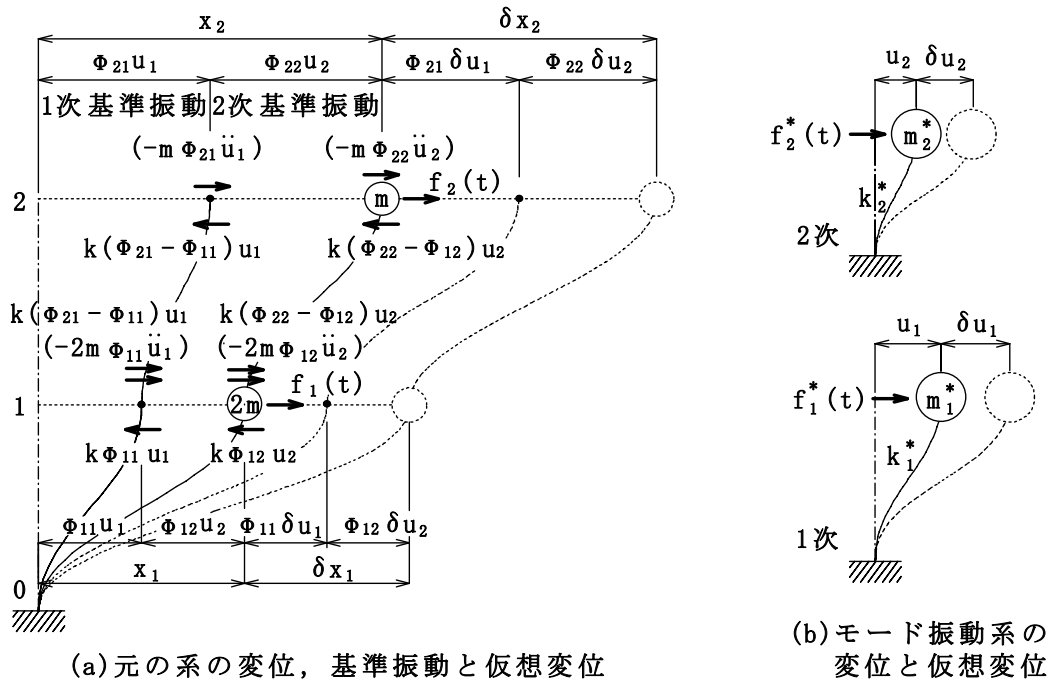


図 6.5 連成しない方程式を構築するための仮想仕事の原理の適用

図 6.5(a)は、時刻  $t$  における、元の系の動的な力のつりあい状態を示している。ただし、元の変位  $x_1, x_2$  は、基準振動に分離してある。この図では、各基準振動に対応する慣性力と復元力を示した。なお、2 次基準振動は、実際は図 6.2(d) に示すように、節点 1 と節点 2 の変位は符号が逆であるが、ここでは感覚的にわかりやすいように、両方とも正の符号で表現した。節点 1 と節点 2 の動的な力のつり合い状態を式で表わすと、それぞれ

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{2m\phi_{11}\ddot{u}_1}_{\text{1次基準振動の慣性力}} + \underbrace{k(2\phi_{11} - \phi_{21})u_1}_{\text{1次基準振動の復元力}} + \underbrace{2m\phi_{12}\ddot{u}_2}_{\text{2次基準振動の慣性力}} + \underbrace{k(2\phi_{12} - \phi_{22})u_2}_{\text{2次基準振動の復元力}} - f_1(t) = 0 \\
 &\underbrace{m\phi_{21}\ddot{u}_1}_{\text{1次基準振動の慣性力}} + \underbrace{-k(\phi_{11} - \phi_{21})u_1}_{\text{1次基準振動の復元力}} + \underbrace{m\phi_{22}\ddot{u}_2}_{\text{2次基準振動の慣性力}} + \underbrace{-k(\phi_{12} - \phi_{22})u_2}_{\text{2次基準振動の復元力}} - f_2(t) = 0
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

となる。式(6.33)の第 1 式では、要素 1 と要素 2 の復元力が足し合わさってい

ることに注意。

ある基準振動の慣性力あるいは復元力は、他の基準振動の変位に対して仕事をしないことを示したいので、節点 1 と節点 2 の“元の変位に対する仮想変位”として、時刻  $t$  と微小時間後  $t + \Delta t$  の間における微小変位  $\delta x_1, \delta x_2$  を用いる。それに対応する“基準座標の仮想変位”を  $\delta u_1, \delta u_2$  とすると、式(6.21)より次の関係がある。

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= \underbrace{\phi_{11}\delta u_1}_{\text{1次基準振動の仮想変位}} + \underbrace{\phi_{12}\delta u_2}_{\text{2次基準振動の仮想変位}} && \leftarrow \text{節点1の仮想変位} \\ \delta x_2 &= \underbrace{\phi_{21}\delta u_1}_{\text{1次基準振動の仮想変位}} + \underbrace{\phi_{22}\delta u_2}_{\text{2次基準振動の仮想変位}} && \leftarrow \text{節点2の仮想変位} \end{aligned} \quad (6.34)$$

1 次基準振動の慣性力(式(6.33)参照)の仮想仕事  $\Delta W_{F1}$  は、式(6.34)より

$$\begin{aligned} \Delta W_{F1} &= (-2m\phi_{11}\ddot{u}_1)\delta x_1 + (-m\phi_{21}\ddot{u}_1)\delta x_2 \\ &= -2m\phi_{11}\ddot{u}_1(\phi_{11}\delta u_1 + \phi_{12}\delta u_2) - m\phi_{21}\ddot{u}_1(\phi_{21}\delta u_1 + \phi_{22}\delta u_2) \\ \therefore \Delta W_{11} &= \underbrace{-m(2\phi_{11}^2 + \phi_{21}^2)\ddot{u}_1\delta u_1}_{\text{1次基準振動の仮想変位に対する仕事}} \quad \underbrace{-m(2\phi_{11}\phi_{12} + \phi_{21}\phi_{22})\ddot{u}_1\delta u_2}_{\text{2次基準振動の仮想変位に対する仕事}} \end{aligned} \quad (6.35)$$

である。右辺の第 2 項の 2 次基準振動の仮想変位に対する仕事に、モードベクトルの値(式(6.32))を代入すると以下のとおりとなる。

$$-m(2\phi_{11}\phi_{12} + \phi_{21}\phi_{22})\ddot{u}_1\delta u_2 = -m\left(2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 \cdot 1\right)\ddot{u}_1\delta u_2 = 0 \quad (6.36)$$

1 次基準振動の復元力(式(6.33)参照)の仮想仕事  $\Delta W_{Q1}$  は、式(6.34)より

$$\begin{aligned} \Delta W_{Q1} &= -k(2\phi_{11} - \phi_{21})u_1 \cdot \delta x_1 + k(\phi_{11} - \phi_{21})u_1 \cdot \delta x_2 \\ &= -k(2\phi_{11} - \phi_{21})u_1 \cdot (\phi_{11}\delta u_1 + \phi_{12}\delta u_2) + k(\phi_{11} - \phi_{21})u_1 \cdot (\phi_{21}\delta u_1 + \phi_{22}\delta u_2) \\ \therefore \Delta W_{Q1} &= \underbrace{-k(2\phi_{11}^2 - 2\phi_{11}\phi_{21} + \phi_{21}^2)u_1\delta u_1}_{\text{1次基準振動の仮想変位に対する仕事}} \\ &\quad \underbrace{-k(2\phi_{11}\phi_{12} - \phi_{21}\phi_{12} - \phi_{11}\phi_{22} + \phi_{21}\phi_{22})u_1\delta u_2}_{\text{2次基準振動の仮想変位に対する仕事}} \end{aligned} \quad (6.37)$$

である。右辺の第 2 項の 2 次基準振動の仮想変位に対する仕事に、モードベクトルの値(式(6.32))を代入すると以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned} &-k(2\phi_{11}\phi_{12} - \phi_{21}\phi_{12} - \phi_{11}\phi_{22} + \phi_{21}\phi_{22})u_1\delta u_2 \\ &= -k\left\{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 + 1 \cdot 1\right\}u_1\delta u_2 = 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$



すなわち、ある基準振動の慣性力あるいは復元力は、他の基準振動の微小変位に対して、常に仕事をしないことを意味している。これは、基準振動が互いに連成していないから当然のことである。この性質を基準振動の**直交性** (orthogonality) という。これは、幾何学上で、“直交しているベクトルの内積は0である” からきている。それについては、次節で説明する。

結局、1次基準振動の慣性力と復元力の仮想仕事はそれぞれ

$$\Delta W_{F1} = -m(2\phi_{11}^2 + \phi_{21}^2)\ddot{u}_1 \delta u_1 \quad (6.39)$$

$$\Delta W_{Q1} = -k(2\phi_{11}^2 - 2\phi_{11}\phi_{21} + \phi_{21}^2)u_1 \delta u_1 = -k\{\phi_{11}^2 + (\phi_{21} - \phi_{11})^2\}u_1 \delta u_1 \quad (6.40)$$

である。同様に、2次基準振動の慣性力と復元力の仮想仕事は、それぞれ

$$\Delta W_{F2} = -m(2\phi_{12}^2 + \phi_{22}^2)\ddot{u}_2 \delta u_2 \quad (6.41)$$

$$\Delta W_{Q2} = -k\{\phi_{12}^2 + (\phi_{22} - \phi_{12})^2\}u_2 \delta u_2 \quad (6.42)$$

である。外力の仮想仕事は

$$\begin{aligned} \Delta W_f &= f_1(t)\delta x_1 + f_2(t)\delta x_2 \\ &= f_1(t)(\phi_{11}\delta u_1 + \phi_{12}\delta u_2) + f_2(t)(\phi_{21}\delta u_1 + \phi_{22}\delta u_2) \\ &= \{\phi_{11}f_1(t) + \phi_{21}f_2(t)\}\delta u_1 + \{\phi_{12}f_1(t) + \phi_{22}f_2(t)\}\delta u_2 \end{aligned} \quad (6.43)$$

である。

仮想仕事の合計は0であるから以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \Delta W &= \Delta W_{F1} + \Delta W_{Q1} + \Delta W_{F2} + \Delta W_{Q2} + \Delta W_f \\ &= \left[ -m(2\phi_{11}^2 + \phi_{21}^2)\ddot{u}_1 - k\{\phi_{11}^2 + (\phi_{21} - \phi_{11})^2\} + \{\phi_{11}f_1(t) + \phi_{21}f_2(t)\} \right] \delta u_1 \\ &\quad + \left[ -m(2\phi_{12}^2 + \phi_{22}^2)\ddot{u}_2 - k\{\phi_{12}^2 + (\phi_{22} - \phi_{12})^2\} + \{\phi_{12}f_1(t) + \phi_{22}f_2(t)\} \right] \delta u_2 = 0 \end{aligned} \quad (6.44)$$

本来、仮想変位は任意であるから、 $\delta u_1$  と  $\delta u_2$  の値にかかわらず、式(6.44)が成立しなければならない。したがって、それらにかかっている項が、0 でなければならぬ。ゆえに

$$\begin{cases} -m(2\phi_{11}^2 + \phi_{21}^2)\ddot{u}_1 - k\{\phi_{11}^2 + (\phi_{21} - \phi_{11})^2\}u_1 + \{\phi_{11}f_1(t) + \phi_{21}f_2(t)\} = 0 \\ -m(2\phi_{12}^2 + \phi_{22}^2)\ddot{u}_2 - k\{\phi_{12}^2 + (\phi_{22} - \phi_{12})^2\}u_2 + \{\phi_{12}f_1(t) + \phi_{22}f_2(t)\} = 0 \end{cases} \quad (6.45)$$

である。第 1 式と 2 式が、それぞれ 1 次と 2 次のモード振動系の運動方程式である。

もし仮想変位を  $\delta u_2 = 0$  に設定すると、式(6.44)で 2 次のモード振動系の運動方程式が消滅する。すなわち、 $s$  次モードの運動方程式だけを求めるには、 $s$  次モード振動系以外の仮想変位を 0 に設定すればよい。

式(6.45)にモードベクトルの値(式(6.32))を代入すると、以下のように、連成しない方程式が求まる。

$$\begin{cases} 2m\ddot{u}_1 + k(2 - \sqrt{2})u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}f_1(t) + f_2(t) \\ 2m\ddot{u}_2 + k(2 + \sqrt{2})u_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}f_1(t) + f_2(t) \end{cases} \quad (6.46)$$

これらの式を 2 で割ると、前節と一致する。

モード解析の“連成しない方程式に変える仕組み”の数学的に厳密な説明は、は第 19 章で述べる。

### 6.3 ベクトルと基準振動の直交性

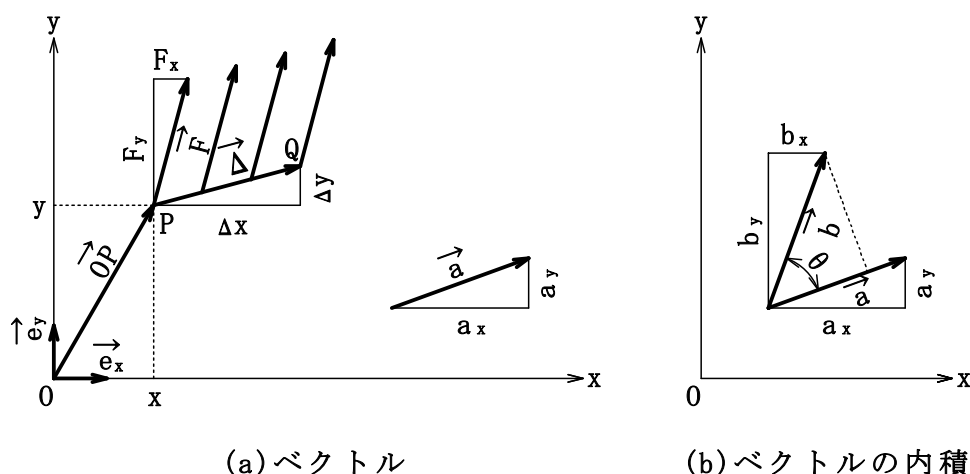


図 6.6 ベクトルとその内積

## (1) ベクトル, その内積および直交

この項では、われわれが存在する空間に当てはめて理解できるベクトルを説明する。ここでは説明を簡単にするために平面で論じるが、そのまま多次元空間に拡張できるので、一般性を持たせる意味で“空間”という言葉を用いる。

### (a) ベクトル

質量は大きさだけをもつ量である。このような量を**スカラー**とよぶ。これに対して、力や速度は、大きさと向きをもつ量である。このような量を**ベクトル**といい、それぞれ矢印のついた文字 $\vec{F}, \vec{v}$ で表す。

図 6.6(a)に示すように、質点が、時刻 $t$ において空間の原点 $P$ に位置し、力 $\vec{F}$ を受けている。微小時間 $\Delta t$ 後に、質点が点 $Q$ へ微小変位 $\vec{\Delta}$ したとする。

時刻 $t$ における質点の位置 $P$ は、適当に定めた点 $O$ を始点とし終点を $P$ とした“大きさと方向を持った線分(有向線分)”で、その空間において幾何学的に表すことができる。このベクトルを**位置ベクトル**といい、記号 $\vec{OP}$ で表す。その時刻 $t$ の力 $\vec{F}$ は、始点を $P$ としたベクトルで表現できる。 $\Delta t$ が微小であるので、 $t \leq t \leq t + \Delta t$ における力は、図 6.6(a)に示すように、“時々刻々と直線上を移動する質点の位置”を始点とし、大きさと方向が同じである有向線分として表現できる。このように、“大きさと向きが等しいベクトル”すなわち“ディメンジョンが同じで、平行移動によって完全に重なり合うベクトルは”は一般に等しいと考える。ただし、位置ベクトルだけは、“始点が原点 $O$ ”という条件が加わる。

ベクトルを代数的に扱うには、図 6.6(a)に示すように、**xy直交座標系**を用いる。ベクトル $\vec{a}$ は、 $x$ 軸方向と $y$ 軸方向の基本ベクトル(単位長さのベクトル) $\vec{e}_x$ と $\vec{e}_y$ によって表わすことができる。すなわち

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y \quad (6.47)$$

である。ここで、 $a_x$ と $a_y$ は、それぞれ $\vec{a}$ の $x$ 方向と $y$ 方向の成分である。

もう1つの方法は、ベクトルを座標系の成分の配列すなわち**数ベクトル**で表わす方法である。この方法では、成分の配列番地の意味が暗黙に了解されることが前提にある。たとえば、力、微小変位、速度、加速度は、通常、成分を縦に並べた**列ベクトル**で表わし、番地の1行と2行は、以下のように、それぞれ $xy$ 座標系の $x$ 軸方向と $y$ 軸方向の成分を意味している。

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}, \quad \vec{\Delta} = \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow xy座標系のx軸方向の成分 \\ \leftarrow xy座標系のy軸方向の成分 \end{array} \quad (6.48)$$

これらの数ベクトルは、横に並べた**行ベクトル**で表わしてもいいのだが、ベクトルにおける積の約束事の都合から、主に列ベクトルで表現する。式(6.48)の数ベクトルは、すべて共通の座標系の成分で表されているが、数ベクトルで注意しなければならないことは、同一のベクトルを同じ空間において異なる座標系の成分で表す場合があることである。したがって、ベクトルが数ベクトルで表されている場合、それがいかなる座標系の成分で表されているかを意識することは重要なことである。

### (b) ベクトルの内積と直交

2つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を考える。それらを基本ベクトルで表わすと

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y, \quad \vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y \quad (6.49)$$

となる。数ベクトルで表すと

$$\vec{a} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix} = \{a\}, \quad \vec{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = \{b\} \quad (6.50)$$

である。もし両ベクトルの始点が一致していない場合は、ベクトルは平行移動しても変わらないから、図 6.6(b)に示すように、平行移動させて始点を一致させる。そのとき、2つのベクトルの**内積**を $\vec{a} \cdot \vec{b}$ で表し、以下のように定義する。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta \quad (6.51)$$

ここで、 $\theta$ は両ベクトルが作る2つの角で小さい方で、 $a$ と $b$ はそれぞれのベクトルの大きさ、すなわち

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} \quad (6.52)$$

である。この定義から、“2つのベクトルが直交する場合( $\theta = \pi/2$ )は内積が0である”ことがわかる。

内積を式(6.49)の基本ベクトルで表わした式で計算すると

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y) \cdot (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y) \\ &= a_x b_x (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) + a_y b_y (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y) + a_x b_y (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y) + a_y b_x (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x) \end{aligned} \quad (6.53)$$

となる。 $x$ 軸と $y$ 軸が直交していることを考慮すると、相異なる方向の基本ベクトルの内積および同じ基本ベクトルの内積は、それぞれ

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 1 \cdot 1 \cos \pi/2 = 0, \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1 \cdot 1 \cos 0 = 1 \quad (6.54)$$

である。式(6.53)に(6.54)を代入すると次式となる。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y \quad (6.55)$$

また、内積を数ベクトルで表わす場合、次のような約束になっている。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \{a\} \cdot \{b\} = \{a\}^T \{b\} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = \{a_x \quad a_y\} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \quad (6.56)$$

ここで、 $\{a\}^T$  は列ベクトル $\{a\}$ を行ベクトルに**転置**することを意味している。

したがって、数ベクトルで表わした内積は、式(6.55)から

$$\{a\} \cdot \{b\} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = \{a_x \quad a_y\} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y \quad (6.57)$$

である。

数ベクトルで表す方法のすぐれている点は、ベクトルそのものより、それを構成する成分が強調されていることである。このことは、多次元ベクトルあるいは多次元座標系への拡張につながっている。

## (2) 基準振動の直交性

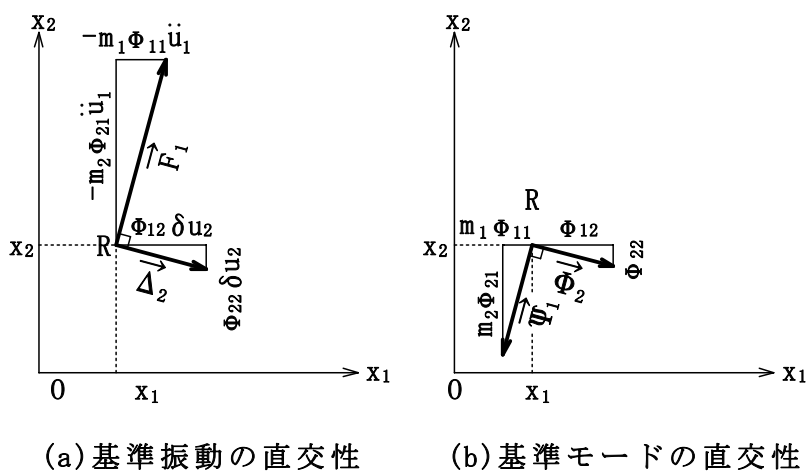


図 6.7 基準振動とモードベクトルの直交性

図 6.5 の問題に戻ろう。図 6.7 に示すように、元の変位  $x_1$  と  $x_2$  をそれぞれ横軸と縦軸とした  $x_1 x_2$  直交座標系を考える (2 種類のベクトルが重ならないように、同じ座標系を同 6.7(a) と (b) に示した)。点  $R(x_1, x_2)$  は、時刻  $t$  において、節点 1 と節点 2 の変位がそれぞれ  $x_1$  と  $x_2$  であることを意味している。この座標系

の存在する空間は、実在する空間でなく、理論上の空間である。

変位ベクトル

$$\overrightarrow{OR} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (6.58)$$

は位置ベクトルである。

時刻  $t$  の微小時間  $\Delta t$  後における、2 次基準振動の節点 1 と節点 2 の微小変位  $\phi_{12}\delta u_2$  と  $\phi_{22}\delta u_2$  は、 $x_1x_2$  座標系において、図 6.7(a) に示すように、点  $R$  を始点とした微小変位ベクトル  $\overrightarrow{\Delta_2}$  の  $x_1$  軸方向と  $x_2$  軸方向の成分とみなすことができる。すなわち

$$\overrightarrow{\Delta_2} = \begin{Bmatrix} \phi_{12}\delta u_2 \\ \phi_{22}\delta u_2 \end{Bmatrix} \quad (6.59)$$

である。同様に、時刻  $t$  において、点  $R$  を始点とした 1 次基準振動の慣性力ベクトル  $\overrightarrow{F_1}$

$$\overrightarrow{F_1} = \begin{Bmatrix} -2m\phi_{11}\ddot{u}_1 \\ -m\phi_{21}\ddot{u}_1 \end{Bmatrix} \quad (6.60)$$

を考えることができる。 $\Delta t$  は微小時間であるので、その間の慣性力  $\overrightarrow{F_1}$  は変化しない。したがって、 $\overrightarrow{F_1}$  と  $\overrightarrow{\Delta_2}$  の内積  $\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{\Delta_2}$  は、その間の仕事である。式(6.57)から

$$\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{\Delta_2} = \begin{Bmatrix} -2m\phi_{11}\ddot{u}_1 \\ -m\phi_{21}\ddot{u}_1 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \phi_{12}\delta u_2 \\ \phi_{22}\delta u_2 \end{Bmatrix} = -2m\phi_{11}\ddot{u}_1 \cdot \phi_{12}\delta u_2 - m\phi_{21}\ddot{u}_1 \cdot \phi_{22}\delta u_2 \quad (6.61)$$

である。式(6.36)より最右辺が 0 である。

$$\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{\Delta_2} = 0 \quad (6.62)$$

すなわち、この理論上の空間において、ある基準振動の慣性力ベクトルと別の基準振動の微小変位ベクトルは直交する。これが慣性力に対する基準振動の“直交性”とよばれるゆえんである。式(6.61)の最右辺に着目すると、第 1 項と第 2 項は、それぞれ節点 1 と節点 2 の 1 次基準振動の慣性力が 2 次基準振動の微小変位に対してなした仕事である。式(6.62)は、これらの仕事の合計が常に 0 であるということである。これが慣性力に対する基準振動の直交性の物理的な意味である。

変位  $x_1$  と  $x_2$  が座標とよばれるのは、上記のように、それらによって理論上の

座標系が構成されるからである。

式(6.62)を変形すると

$$\begin{Bmatrix} -2m\phi_{11} \\ -m\phi_{21} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} \ddot{u}_1 \delta u_2 = 0$$

となる。 $-\ddot{u}_1 \delta u_2$ を消去すると

$$\begin{Bmatrix} 2m\phi_{11} \\ m\phi_{21} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = (2m\phi_{11})\phi_{12} + m\phi_{21}\phi_{22} = 0$$

すなわち

$$\begin{Bmatrix} m_1\phi_{11} \\ m_2\phi_{21} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = (m_1\phi_{11})\phi_{12} + (m_2\phi_{21})\phi_{22} = 0 \quad (6.63)$$

である。これを“質量に対する**モードベクトルの直交性**”とよぶが、式の誘導からわかるように、“慣性力に対する基準振動の直交性”と同じ意味を持つ。一般性のある“モードベクトルの直交性”の証明は、第10章で行列を用いて行う。

図6.7(b)に示すように、質点の位置 $R(x_1, x_2)$ を始点として、“1次モードベクトルの成分と質量の積”を成分としたベクトル $\vec{\Psi}_1$ と2次モードベクトル $\vec{\phi}_2$

$$\vec{\Psi}_1 = \begin{Bmatrix} m_1\phi_{11} \\ m_2\phi_{21} \end{Bmatrix}, \quad \vec{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} \quad (6.64)$$

が考えられ、これらは質点の位置にかかわらず不変であり、直交する。

## 6.4 要約

多自由度系の振動は、節点間の力の相互作用によって、複雑な振動をする。しかし、その振動は、連成しない基準振動で構成されている。各基準振動は、それぞれ常に一定な固有の振動形(モードベクトル)で振動する。モード解析とは、この基準振動の性質を利用して“①連立微分方程式を変数変換と式の重ね合わせによって連成しない方程式に変える、②その方程式を解く、③その解を逆に変換して元の変位を求める”方法である。

## 第7章 モード解析の用語

この章では、第6章で述べられていない“モード解析の用語”を説明する。

### 7.1 多次元ベクトル・多次元空間・多次元座標系への拡張

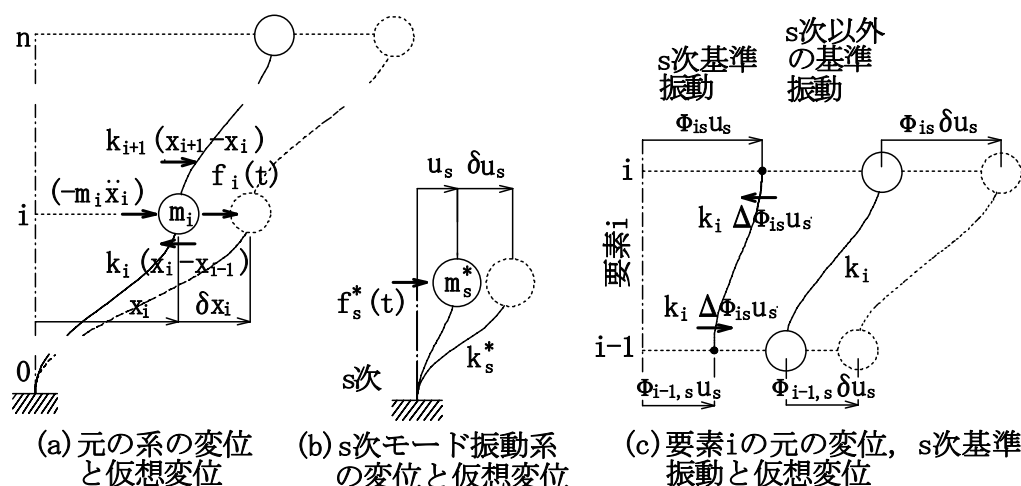


図7.1 n自由度系の元の変位とs次基準振動

図7.1(a)に示す $n$ 自由度のせん断建物モデルにおいて、節点 $i$ の変位を $x_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ )とする。これは一般化座標であり、 $n$ 次元の $x_1, x_2, \dots, x_n$ 直交座標系が、理論上で考えられる。4次元以上の座標系を全体像として頭でえがくことは困難だが、任意に取り出した2つの座標軸によって構成される平面において、それらの座標軸が常に直交すると考えればよい。この $n$ 次元座標系の存在する空間を $n$ 次元空間という。空間と座標系は異なる概念であると認識すべきである。なぜならば、一つの空間に複数の座標系を考える場合があるからである。

図7.1(a)に節点 $i$ における“動的な力につり合い”を示す。その節点の質量と外力をそれぞれ $m_i$ と $f_i(t)$ 、節点 $i-1$ と節点 $i$ の間の要素 $i$ の剛性を $k_i$ とすると、図7.1(a)に示すように、節点 $i$ の運動方程式は

$$m_i \ddot{x}_i + k_i(x_i - x_{i-1}) - k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) = f_i(t) \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (7.1)$$

となる。ただし、 $x_0 = 0$ であり、 $x_{n+1} = 0, k_{n+1} = 0$ とする。この $n$ 自由度系の振動は、 $n$ 個の基準振動で構成されている。元の変位 $x_i$ と基準座標 $u_i$ の関係は、



式(6.15)より以下のとおりである。

$$x_i = \phi_{i1}u_1 + \phi_{i2}u_2 + \dots + \phi_{in}u_n = \sum_{j=1}^n \phi_{ij}u_j \quad (7.2)$$

この座標系で、 $n$ 次元のベクトルとして、変位 $\vec{x}$ 、速度 $\vec{v}$ 、加速度 $\vec{a}$ 、外力 $\vec{f}$ 、慣性力 $\vec{F}$ 、復元力 $\vec{Q}$ 、 $s$ 次モードベクトル $\vec{\phi}_s$ 、 $s$ 次基準振動の慣性力 $\vec{F}_s$ 、などが考えられる。例として、いくつかを数ベクトルで表わすと

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad \vec{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix}, \quad \vec{\phi}_s = \begin{Bmatrix} \phi_{1s} \\ \phi_{2s} \\ \vdots \\ \phi_{ns} \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow x_1 \text{軸方向の成分} \\ \leftarrow x_2 \text{軸方向の成分} \\ \vdots \\ \leftarrow x_n \text{軸方向の成分} \end{array} \quad (7.3)$$

である。 $n$ 次元ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は、式(6.57)を拡張して

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \{a\}^T \{b\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} = \{a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n\} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \quad (7.4)$$

と定義される。“質量に対するモードベクトルの直交性”は、式(6.63)より

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} m_1\phi_{1j} \\ m_2\phi_{2j} \\ \vdots \\ m_n\phi_{nj} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi_{1s} \\ \phi_{2s} \\ \vdots \\ \phi_{2s} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} m_1\phi_{1j} \\ m_2\phi_{2j} \\ \vdots \\ m_n\phi_{nj} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \phi_{1s} \\ \phi_{2s} \\ \vdots \\ \phi_{2s} \end{Bmatrix} = (m_1\phi_{1j})\phi_{1s} + (m_2\phi_{2j})\phi_{2s} + \dots + (m_n\phi_{nj})\phi_{ns} \\ &= \sum_{i=1}^n (m_i\phi_{ij})\phi_{is} = 0 \quad (j \neq s) \end{aligned} \quad (7.5)$$

である。“剛性に対するモードベクトルの直交性”は第10章で説明する。

## 7.2 一般化質量、一般化剛性と一般化力

$n$ 自由度系の連立微分方程式(7.1)は、変数変換と式の重ね合わせによって、連成しない $n$ 個のモード振動系の運動方程式に変えることができる。 $s$ 次モード振動系の運動方程式は、式(6.6)に示すように

$$m_s^* \ddot{u}_s + k_s^* u_s = f_s^*(t) \quad (s=1, 2, \dots, n) \quad (7.6)$$

と表わすことができる。この方程式において、 $m_s^*$ 、 $k_s^*$ と $f_s^*(t)$ を、 $s$ 次モード

の**一般化質量**(generalized mass), **一般化剛性**(generalized stiffness)と**一般化力**(generalized force)という。 $(x_1, x_2)$ も $(u_1, u_2)$ も一般化座標であるから, 連成していない方程式の係数だけ, “一般化”という名称が付くのはおかしい気がする。しかし, 通常, それらの名称で呼ばれているので, この本でもそうよぶことにする。それらを**モード質量**(modal mass), **モード剛性**(modal stiffness)と**モード力**(modal force)とよんでいる本もまれにある(参考文献[3-1.2])。

$s$ 次モードベクトル $\bar{\phi}_s$ (式(7.3))がわかっている場合の一般化質量 $m_s^*$ , 一般化剛性 $k_s^*$ と一般化力 $f_s^*(t)$ を求めてみよう。 $s$ 次モード振動系の運動方程式だけを求めることを目的とした場合, 前記のように, 図 7.1(b)に示す $s$ 次モード振動系以外の仮想変位 $\delta u_j = 0, (j \neq s)$ とすればよい。その場合, 元の系の節点 $i$ における仮想変位 $\delta x_i$ は, 式(7.2)より以下のとおりとなる。

$$\delta x_i = \phi_{is} \delta u_s \tag{7.7}$$

慣性力の仮想仕事 $\Delta W_F$ は,  $s$ 次基準振動以外は0となるので

$$\begin{aligned} \Delta W_F &= \sum_{i=1}^n (-m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-m_i \phi_{ij} \ddot{u}_j) \phi_{is} \delta u_s \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (-m_i \phi_{ij} \ddot{u}_j) \phi_{is} \delta u_s = - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left\{ (m_i \phi_{ij}) \phi_{is} \right\} \ddot{u}_j \delta u_s \\ \Delta W_F &= - \sum_{i=1}^n \left\{ (m_i \phi_{i1}) \phi_{is} \right\} \ddot{u}_1 \delta u_s - \cdots - \sum_{i=1}^n \left\{ (m_i \phi_{i2}) \phi_{is} \right\} \ddot{u}_2 \delta u_s \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left\{ (m_i \phi_{is}) \phi_{is} \right\} \ddot{u}_s \delta u_s - \cdots - \sum_{i=1}^n \left\{ (m_i \phi_{in}) \phi_{is} \right\} \ddot{u}_n \delta u_s \end{aligned} \tag{7.8}$$

である。質量に対するモードベクトルの直交性(式(7.5))より,  $j = s$ 以外は

$$\sum_{i=1}^n \left\{ (-m_i \phi_{ij}) \phi_{is} \right\} = 0 \quad (j \neq s)$$

となるので, 式(7.8)は以下のとおりとなる。

$$\Delta W_F = - \sum_{i=1}^n \left\{ (m_i \phi_{is}) \phi_{is} \right\} \ddot{u}_s \delta u_s = - \left( \sum_{i=1}^n m_i \phi_{is}^2 \right) \ddot{u}_s \delta u_s \tag{7.9}$$

図 7.1(c)に示すように, 復元力の仮想仕事は, 要素に着目して考える方がわかりやすい。 $\Delta \phi_{is} = \phi_{is} - \phi_{i-1,s}$ とすると, 要素 $i$ の $s$ 次基準振動の復元力は,  $x$ 方向を力の正方向とすると, 節点 $i$ 側が $(-k_i \Delta \phi_{is} u_s)$ で, 節点 $i-1$ 側が $k_i \Delta \phi_{is} u_s$ であ

る。それぞれ節点の仮想変位は  $\delta x_i$  と  $\delta x_{i-1}$  であるから、復元力の仮想仕事  $\Delta W_Q$  は、要素の仮想仕事を合計した

$$\begin{aligned}\Delta W_Q &= \sum_{i=1}^n \{(-k_i \Delta \phi_{is} u_s) \delta x_i + (k_i \Delta \phi_{is} u_s) \delta x_{i-1}\} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{(-k_i \Delta \phi_{is} u_s) \phi_{ij} \delta u_j + (k_i \Delta \phi_{is} u_s) \phi_{i-1,j} \delta u_j\} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \{(-k_i \Delta \phi_{is} u_s) \phi_{ij} \delta u_j + (k_i \Delta \phi_{is} u_s) \phi_{i-1,j} \delta u_j\}\end{aligned}$$

である。“剛性に対するモードベクトルの直交性”より、同様に

$$\begin{aligned}\Delta W_Q &= \sum_{i=1}^n (-k_i \Delta \phi_{is} u_s \cdot \phi_{is} \delta u_s + k_i \Delta \phi_{is} u_s \cdot \phi_{i-1,s} \delta u_s) \\ &= -\sum_{i=1}^n k_i \Delta \phi_{is} (\phi_{is} - \phi_{i-1,s}) u_s \delta u_s = -\left(\sum_{i=1}^n k_i \Delta \phi_{is}^2\right) u_s \delta u_s\end{aligned}\tag{7.10}$$

となる。外力の仮想仕事は以下のとおりである。

$$\Delta W_f = \sum_{i=1}^n f_i(t) \delta x_i = \sum_{i=1}^n f_i(t) \phi_{is} \delta u_s = \left(\sum_{i=1}^n f_i(t) \phi_{is}\right) \delta u_s\tag{7.11}$$

仮想仕事の合計は 0 であるから

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta W_F + \Delta W_Q + \Delta W_f \\ &= -\left(\sum_{i=1}^n m_i \phi_{is}^2\right) \ddot{u}_s \delta u_s - \left(\sum_{i=1}^n k_i \Delta \phi_{is}^2\right) u_s \delta u_s + \left(\sum_{i=1}^n f_i(t) \phi_{is}\right) \delta u_s = 0\end{aligned}$$

である。 $\delta u_s$  を消去すると、以下のように、 $s$  次モード振動系の運動方程式

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i \phi_{is}^2\right) \ddot{u}_s + \left(\sum_{i=1}^n k_i \Delta \phi_{is}^2\right) u_s = \sum_{i=1}^n f_i(t) \phi_{is}\tag{7.12}$$

を得る。したがって、 $s$  次モードの一般化質量、一般化剛性と一般化力は

$$m_s^* = \sum_{i=1}^n m_i \phi_{is}^2, \quad k_s^* = \sum_{i=1}^n k_i \Delta \phi_{is}^2, \quad f_s^*(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \phi_{is}\tag{7.13}$$

である。

### 例題 7.a 一般化質量、一般化剛性と一般化力

第 6 章で用いた 2 自由度のせん断建物モデル(図(6.2))について、一般化質量、一般化剛性と一般化力を求めよう。

1 次モードベクトルの成分は，式(6.32)より  $\phi_{11}=1/\sqrt{2}, \phi_{21}=1$  であるから，その一般化質量，一般化剛性と一般化力は，式(7.13)より

$$m_1^* = m_1\phi_{11}^2 + m_2\phi_{21}^2 = 2m\left(1/\sqrt{2}\right)^2 + m(1)^2 = 2m \quad (\text{a})$$

$$k_1^* = k_1\Delta\phi_{11}^2 + k_2\Delta\phi_{21}^2 = k\left(1/\sqrt{2}\right)^2 + k\left(1-1/\sqrt{2}\right)^2 = k\left(2-\sqrt{2}\right) \quad (\text{b})$$

$$f_1^*(t) = f_1(t)\phi_{11} + f_2(t)\phi_{21} = 1/\sqrt{2}f_1(t) + f_2(t) \quad (\text{c})$$

である。2 次モードベクトルの成分は，式(6.32)より  $\phi_{12}=-1/\sqrt{2}, \phi_{22}=1$  であるから，その一般化質量，一般化剛性と一般化力は，下記のとおりである。

$$m_2^* = m_1\phi_{12}^2 + m_2\phi_{22}^2 = 2m\left(-1/\sqrt{2}\right)^2 + m(1)^2 = 2m \quad (\text{d})$$

$$k_2^* = k_1\Delta\phi_{12}^2 + k_2\Delta\phi_{22}^2 = k\left(1/\sqrt{2}\right)^2 + k\left\{1-\left(-1/\sqrt{2}\right)\right\}^2 = k\left(2+\sqrt{2}\right) \quad (\text{e})$$

$$f_2^*(t) = f_1(t)\phi_{12} + f_2(t)\phi_{22} = -1/\sqrt{2}f_1(t) + f_2(t) \quad (\text{f})$$

### 7.3 モードベクトルの正規化

$s$  次モードベクトルの成分  $\phi_{is}$  は，その比率が一定の条件で任意の値がとれる。

**正規化(normalization)** するとは，以下に示すように，一般化質量  $m_s^*$  を 1 にするように  $\phi_{is}$  を定めることである。

$$m_s^* = \sum_{i=1}^n m_i\phi_{is}^2 = 1 \quad (7.14)$$

正規化した成分  $\phi_{is}$  を求める手順は，まず，成分  $a_{is}$  を適当に定める。それらを正規化するための係数  $\mu$  を

$$\phi_{is} = \mu a_{is} \quad (7.15)$$

とし，式(7.15)を(7.14)に代入すると次式となる。

$$\sum_{i=1}^n m_i\mu^2 a_{is}^2 = 1, \quad \therefore \mu = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n m_i a_{is}^2}} \quad (7.16)$$

式(7.16)を(7.15)に代入すると，以下のように，正規化された成分  $\phi_{is}$  を得る。

$$\phi_{is} = \frac{a_{is}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n m_i a_{is}^2}} \quad (7.17)$$

### 例題 7.b モードベクトルの正規化

例題 7.a と同様に、第 6 章で用いた 2 自由度のせん断建物モデル(図(6.2))について、モードベクトルの正規化を行おう。

1 次モードベクトルの正規化されていない成分は、式(6.32)より  $a_{11} = 1/\sqrt{2}, a_{21} = 1$  であるから、正規化したモードベクトルは、式(7.17)より

$$\phi_{11} = a_{11} / \sqrt{m_1 a_{11}^2 + m_1 a_{21}^2} = (1/\sqrt{2}) / \sqrt{2m(1/\sqrt{2})^2 + m(1)^2} = 1/2\sqrt{m} \quad (a)$$

$$\phi_{21} = a_{21} / \sqrt{m_1 a_{11}^2 + m_1 a_{21}^2} = 1 / \sqrt{2m(1/\sqrt{2})^2 + m(1)^2} = 1/\sqrt{2m} \quad (b)$$

である。2 次モードベクトルの正規化されていない成分は、式(6.32)より  $a_{12} = -1/\sqrt{2}, a_{22} = 1$  であるから、正規化したモードベクトルは、式(7.17)より

$$\phi_{12} = a_{12} / \sqrt{m_1 a_{12}^2 + m_1 a_{22}^2} = (-1/\sqrt{2}) / \sqrt{2m(-1/\sqrt{2})^2 + m(1)^2} = -1/2\sqrt{m} \quad (c)$$

$$\phi_{22} = a_{22} / \sqrt{m_1 a_{12}^2 + m_1 a_{22}^2} = (1) / \sqrt{2m(-1/\sqrt{2})^2 + m(1)^2} = 1/\sqrt{2m} \quad (d)$$

である。したがって、正規化されたモードベクトルの成分は、 $kg^{-1/2}$  のディメンジョンを持つ。

### 7.4 刺激係数, 等価質量, 等価質量比と等価高さ

刺激係数, 等価質量, 等価質量比と等価高さは, “地震による地盤振動(以降, 地震動とよぶ)” に関する用語である。図 7.2 に示すように,  $\ddot{x}_g$  を地震による地盤の絶対加速度,  $x_i$  を地盤に対する節点  $i$  の相対変位とすると, 節点  $i$  の絶対加速度は  $\ddot{x}_i + \ddot{x}_g$  である。式(7.1)の  $\ddot{x}_i$  を  $\ddot{x}_i + \ddot{x}_g$  に置き換え,  $f_i(t) = 0$  であるから, 以下に示す “地震動に対する節点  $i$  の運動方程式” を得る。

$$m_i(\ddot{x}_i + \ddot{x}_g) + k_i(x_i - x_{i-1}) - k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) = 0 \quad (i = 1 \sim n) \quad (7.18)$$

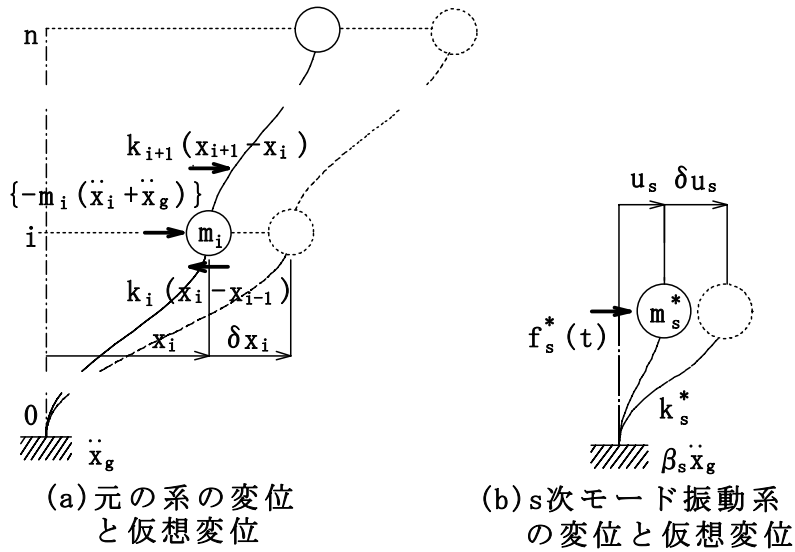


図7.2 地震に対するn自由度系の振動

(1) 刺激係数

地震動に対するs次モード振動系の運動方程式を求めるために、仮想変位は7.2節と同様に  $\delta x_i = \phi_{is} \delta u_s$  とする。節点iの加速度は、式(7.2)を2回微分して

$$\ddot{x}_i = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} \ddot{u}_j \tag{7.19}$$

である。したがって、慣性力による仮想仕事  $\Delta W_F$  は

$$\begin{aligned} \Delta W_F &= \sum_{i=1}^n \left\{ -m_i (\ddot{x}_i + \ddot{x}_g) \delta x_i \right\} = \sum_{i=1}^n \left\{ -m_i \left( \sum_{j=1}^n \phi_{ij} \ddot{u}_j + \ddot{x}_g \right) \phi_{is} \delta u_s \right\} \\ &= -\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_i \phi_{ij} \ddot{u}_j \phi_{is} + m_i \phi_{is} \ddot{x}_g \right) \delta u_s = -\left( \sum_{j=1}^n \ddot{u}_j \sum_{i=1}^n m_i \phi_{ij} \phi_{is} + \ddot{x}_g \sum_{i=1}^n m_i \phi_{is} \right) \delta u_s \end{aligned}$$

である。“質量に対するモードベクトルの直交性” から、 $j = s$  以外の項は0となるので

$$\Delta W_F = -\left( \ddot{u}_s \sum_{i=1}^n m_i \phi_{is} \phi_{is} + \ddot{x}_g \sum_{i=1}^n m_i \phi_{is} \right) \delta u_s = -\left( \ddot{u}_s \sum_{i=1}^n m_i \phi_{is}^2 + \ddot{x}_g \sum_{i=1}^n m_i \phi_{is} \right) \delta u_s \tag{7.20}$$

となる。復元力の仮想仕事  $\Delta W_Q$  は式(7.10)である。また、 $f_i(t) = 0$  であるので、外力の仮想仕事は  $\Delta W_f = 0$  である。したがって、仮想仕事の合計は

$$\Delta W = W_F + \Delta W_Q = -\left( \ddot{u}_s \sum_{i=1}^n m_i \phi_{is}^2 + \ddot{x}_g \sum_{i=1}^n m_i \phi_{is} \right) \delta u_s - u_s \left( \sum_{i=1}^n k_i \Delta \phi_{is}^2 \right) \delta u_s = 0$$

である。 $\delta u_s$ を消去すると、以下のように  $s$  次モード振動系の運動方程式を得る。

$$\left( \sum_{i=1}^n m_i \phi_{is}^2 \right) \ddot{u}_s + \left( \sum_{i=1}^n k_i \Delta \phi_{is}^2 \right) u_s = - \left( \sum_{i=1}^n m_i \phi_{is} \right) \ddot{x}_g \quad (7.21)$$

両辺を一般化質量で割ると

$$\ddot{u}_s + \omega_s^2 u_s = -\beta_s \ddot{x}_g \quad (s=1,2,\dots,n) \quad (7.22)$$

$$\beta_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{is}}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{is}^2}, \quad \omega_s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n k_i \Delta \phi_{is}^2}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{is}^2}} \quad (7.23)$$

である。正規化した場合、一般化質量  $m_s^* = \sum_{i=1}^n m_i \phi_{is}^2 = 1$  であるので、式(7.23)は

$$\beta_s = \sum_{i=1}^n m_i \phi_{is}, \quad \omega_s = \sqrt{\sum_{i=1}^n k_i \Delta \phi_{is}^2} \quad (7.24)$$

となる。 $\beta_s$ は**刺激係数**(participation factor)とよばれる。これは、元の系の地盤加速度に対する  $s$  次モード振動系の地盤加速度の倍率である。それが大きいことは、そのモード振動系が大きな地盤加速度を受けることを意味している。

### 例題 7.c 刺激係数

例題 7.a と同様に、第 6 章で用いた 2 自由度のせん断建物モデル(図(6.2))について、刺激係数を求めよう。

まず、正規化されていない刺激係数を求めよう。1 次の刺激係数は、式(7.23)に  $a_{11} = 1/\sqrt{2}, a_{21} = 1$  を代入すると

$$\beta_1 = \frac{m_1 a_{11} + m_2 a_{21}}{m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2} = \frac{2m(1/\sqrt{2}) + m \cdot 1}{2m(1/\sqrt{2})^2 + m \cdot 1^2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} = 1.207 \quad (a)$$

である。2 次の刺激係数は、式(7.23)に  $a_{21} = -1/\sqrt{2}, a_{22} = 1$  を代入すると

$$\beta_2 = \frac{m_1 a_{12} + m_2 a_{22}}{m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2} = \frac{2m(-1/\sqrt{2}) + m \cdot 1}{2m(-1/\sqrt{2})^2 + m \cdot 1^2} = -\frac{\sqrt{2} - 1}{2} = -0.207 \quad (b)$$

である。1 次の方がはるかに大きいことがわかる。刺激係数がマイナスであることは、そのモード振動系の地盤加速度が、 $\ddot{x}_g$  と逆方向であることを示してい

る。

つぎに、正規化された刺激係数を求めよう。1 次の刺激係数は、式(7.24)に  $\phi_{11}=1/2\sqrt{m}, \phi_{21}=1/\sqrt{2m}$  を代入すると

$$\beta_1 = m_1\phi_{11} + m_2\phi_{21} = 2m\left(1/2\sqrt{m}\right) + m\left(1/\sqrt{2m}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\sqrt{m} = 1.707\sqrt{m} \quad (c)$$

である。2 次の刺激係数は、式(7.24)に  $\phi_{12}=-1/2\sqrt{m}, \phi_{22}=1/\sqrt{2m}$  を代入すると

$$\beta_2 = m_1\phi_{12} + m_2\phi_{22} = 2m\left(-1/2\sqrt{m}\right) + m\left(1/\sqrt{2m}\right) = -\frac{2-\sqrt{2}}{2}\sqrt{m} = -0.293\sqrt{m} \quad (d)$$

である。刺激係数は、正規化された場合もされない場合も、1次と2次の比は同じであるが、前者は、 $kg^{1/2}$  のディメンジョンを持つ。

## (2) 等価質量, 等価質量比と等価高さ

地震動を受ける構造物の設計において、特に重要なのは、基部のせん断力と曲げモーメントとである。この設計では、通常、地震動以外の外力  $f_i(t)$  を考えないので、基部のせん断力は慣性力の合計であり、曲げモーメントは慣性力と作用高さの積の合計である。

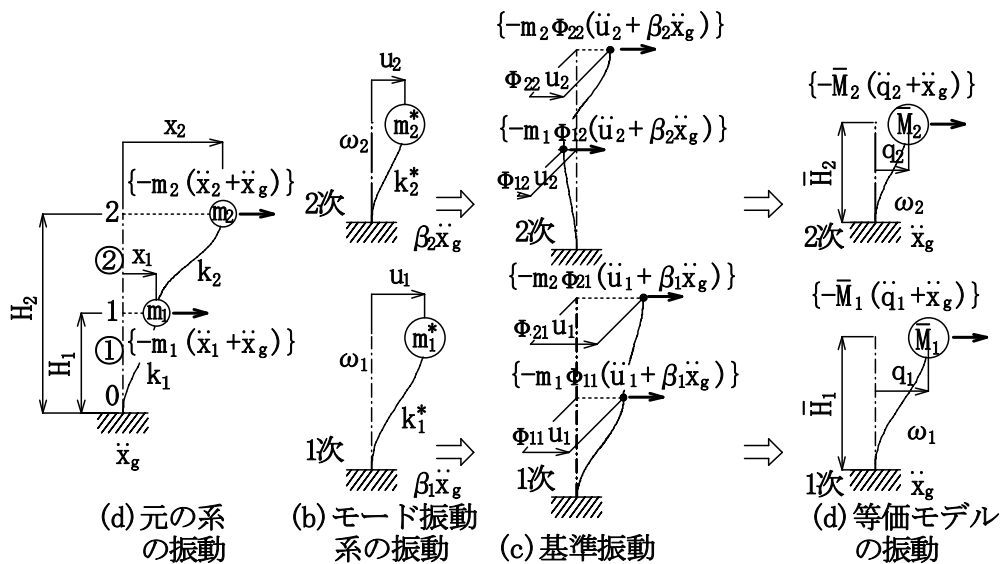


図7.3 等価質量と等価高さ

基準振動は一定の振動形で振動するが、第6章で述べたように、動的な力のつり合った系でないので、一般に1自由度系に等価に置き換えることができない



い。しかし、地震動以外の外力  $f_i(t)$  ない場合、慣性力、復元力と減衰力が動的につり合う系であると考えることができるので、各基準振動は、1自由度系に等価に置き換えることが可能である。

わかりやすいように、ここでは図 7.3(a)に示すような 2 自由度系について論ずる。節点 1 と節点 2 の高さを、それぞれ  $H_1$  と  $H_2$  とする。この図は、地震による地盤加速度  $\ddot{x}_g$  を受ける“元の系”の振動である。同図(b)はモード振動系の振動である。同図(c)は、それらに対応した 1 次と 2 次の基準振動を表わしている。図には基準振動の慣性力も示した。同図(d)は、ある条件で、基準振動を 1 自由度系の振動に等価に置き換えたモデルである。このモデルでは、①地盤加速度は  $\ddot{x}_g$  である、②固有円振動数と基部のせん断力・曲げモーメントが基準振動と同じである。このような等価 1 自由度系で、質量を**等価質量**  $\bar{M}_s$  (equivalent mass, **有効質量**)、質量の基部からの高さを**等価高さ**  $\bar{H}_s$  (equivalent height) という。

1 次モード振動系の運動方程式は、式(7.22)から

$$\ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = -\beta_1 \ddot{x}_g \quad (7.25)$$

である。等価 1 自由度系の運動方程式は、変位を  $q_1$  とすると、上記の条件から

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = -\ddot{x}_g \quad (7.26)$$

である。したがって、以下の関係がある。

$$u_1 = \beta_1 q_1 \quad (7.27)$$

1 次基準振動の節点 1 と節点 2 の絶対加速度  $\ddot{X}_{11}$  と  $\ddot{X}_{21}$  を求めるために、仮想仕事の原理を適用する。仮想変位を  $\delta x_1 = \phi_{11} \delta u_1$ ,  $\delta x_2 = \phi_{21} \delta u_1$  とすると、慣性力の仮想仕事  $\Delta W_F$  は

$$\Delta W_F = (-m_1 \ddot{X}_{11}) \phi_{11} \delta u_1 + (-m_2 \ddot{X}_{21}) \phi_{21} \delta u_1 = -m_1 \ddot{X}_{11} \cdot \phi_{11} \delta u_1 - m_2 \ddot{X}_{21} \cdot \phi_{21} \delta u_1 \quad (7.28)$$

である。また、 $\Delta W_F$  は式(7.20)より

$$\begin{aligned} \Delta W_F &= -\left\{ (m_1 \phi_{11}^2 + m_2 \phi_{21}^2) \ddot{u}_1 + (m_1 \phi_{11} + m_2 \phi_{21}) \ddot{x}_g \right\} \delta u_1 \\ &= -\left( m_1 \phi_{11}^2 + m_2 \phi_{21}^2 \right) \left\{ \ddot{u}_1 + \frac{m_1 \phi_{11} + m_2 \phi_{21}}{m_1 \phi_{11}^2 + m_2 \phi_{21}^2} \ddot{x}_g \right\} \delta u_1 \end{aligned}$$

である。式(7.23)の第 1 式を代入すると

$$\begin{aligned}\Delta W_F &= -(m_1\phi_{11}^2 + m_2\phi_{21}^2)(\ddot{u}_1 + \beta_1\ddot{x}_g)\delta u_1 \\ &= -m_1\{\phi_{11}(\ddot{u}_1 + \beta_1\ddot{x}_g)\}\phi_{11}\delta u_1 - m_2\{\phi_{21}(\ddot{u}_1 + \beta_1\ddot{x}_g)\}\phi_{21}\delta u_1\end{aligned}\quad (7.29)$$

である。式(7.28)と(7.29)は等しいから

$$\ddot{X}_{11} = \phi_{11}(\ddot{u}_1 + \beta_1\ddot{x}_g), \quad \ddot{X}_{21} = \phi_{21}(\ddot{u}_1 + \beta_1\ddot{x}_g) \quad (7.30)$$

である。同様に、2次基準振動の節点1と節点2の絶対加速度は、それぞれ

$$\ddot{X}_{12} = \phi_{12}(\ddot{u}_2 + \beta_2\ddot{x}_g), \quad \ddot{X}_{22} = \phi_{22}(\ddot{u}_2 + \beta_2\ddot{x}_g) \quad (7.31)$$

である。

1次基準振動の基部のせん断力は、慣性力の合計に等しいから

$$\begin{aligned}S_{B1} &= (-m_1\ddot{X}_{11}) + (-m_2\ddot{X}_{21}) = -m_1\phi_{11}(\ddot{u}_1 + \beta_1\ddot{x}_g) - m_2\phi_{21}(\ddot{u}_1 + \beta_1\ddot{x}_g) \\ &= -(m_1\phi_{11} + m_2\phi_{21})(\ddot{u}_1 + \beta_1\ddot{x}_g)\end{aligned}\quad (7.32)$$

である。この式に(7.27)を代入すると

$$S_{B1} = -(m_1\phi_{11} + m_2\phi_{21})\beta_1(\ddot{q}_1 + \ddot{x}_g) \quad (7.33)$$

となる。等価1自由度系の基部のせん断力は

$$S'_{B1} = -\bar{M}_1(\ddot{q}_1 + \ddot{x}_g) \quad (7.34)$$

と表せるから、仮定  $S_{B1} = S'_{B1}$  より

$$-(m_1\phi_{11} + m_2\phi_{21})\beta_1(\ddot{q}_1 + \ddot{x}_g) = -\bar{M}_1(\ddot{q}_1 + \ddot{x}_g)$$

$$\therefore \bar{M}_1 = \beta_1(m_1\phi_{11} + m_2\phi_{21}) \quad (7.35)$$

である。ゆえに、せん断  $n$  質点系の  $s$  次モードの等価質量は

$$\bar{M}_s = \beta_s \sum_{i=1}^n m_i \phi_{is} \quad (7.36)$$

である。正規化した場合、式(7.24)の第1式より下式となる。

$$\bar{M}_s = \beta_s^2 \quad (7.37)$$

1次と2次の等価質量を合計すると

$$\begin{aligned}\bar{M}_1 + \bar{M}_2 &= \beta_1(m_1\phi_{11} + m_2\phi_{21}) + \beta_2(m_1\phi_{12} + m_2\phi_{22}) \\ &= m_1(\phi_{11}\beta_1 + \phi_{12}\beta_2) + m_2(\phi_{21}\beta_1 + \phi_{22}\beta_2)\end{aligned}\quad (7.38)$$

である。

それぞれの節点において、すべての基準振動の慣性力の合計は、元の系の慣性力と一致するから

$$\begin{cases} -m_1\ddot{X}_{11} - m_1\ddot{X}_{12} = -m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_g) \\ -m_2\ddot{X}_{21} - m_2\ddot{X}_{22} = -m_2(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_g) \end{cases}$$

である。これに式(7.30)・(7.31)を代入すると

$$\begin{aligned} &\begin{cases} -m_1\phi_{11}(\ddot{u}_1 + \beta_1\ddot{x}_g) - m_1\phi_{12}(\ddot{u}_2 + \beta_2\ddot{x}_g) = -m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_g) \\ -m_2\phi_{21}(\ddot{u}_1 + \beta_1\ddot{x}_g) - m_2\phi_{22}(\ddot{u}_2 + \beta_2\ddot{x}_g) = -m_2(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_g) \end{cases} \\ \therefore &\begin{cases} -m_1\{(\phi_{11}\ddot{u}_1 + \phi_{12}\ddot{u}_2) + (\phi_{11}\beta_1 + \phi_{12}\beta_2)\ddot{x}_g\} = -m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_g) \\ -m_2\{(\phi_{21}\ddot{u}_1 + \phi_{22}\ddot{u}_2) + (\phi_{21}\beta_1 + \phi_{22}\beta_2)\ddot{x}_g\} = -m_2(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_g) \end{cases}\end{aligned}\quad (7.39)$$

である。式(7.2)より

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \phi_{11}\ddot{u}_1 + \phi_{12}\ddot{u}_2 \\ \ddot{x}_2 = \phi_{21}\ddot{u}_1 + \phi_{22}\ddot{u}_2 \end{cases}\quad (7.40)$$

である。式(7.40)を(7.39)に代入すると下式となる。

$$\begin{cases} -m_1\{\ddot{x}_1 + (\phi_{11}\beta_1 + \phi_{12}\beta_2)\ddot{x}_g\} = -m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_g) \\ -m_2\{\ddot{x}_2 + (\phi_{21}\beta_1 + \phi_{22}\beta_2)\ddot{x}_g\} = -m_2(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_g) \end{cases}$$

これらの式が恒等的に成り立つためには

$$\phi_{11}\beta_1 + \phi_{12}\beta_2 = 1, \quad \phi_{21}\beta_1 + \phi_{22}\beta_2 = 1\quad (7.41)$$

である。これを式(7.38)に代入すると

$$\bar{M}_1 + \bar{M}_2 = m_1 + m_2\quad (7.42)$$

となる。すなわち、等価質量の合計と元の質量の合計とは一致する。

$s$  次モードの等価質量  $\bar{M}_s$  を全質量  $M$  で割った値

$$\bar{R}_s = \frac{\bar{M}_s}{M}\quad (7.43)$$

は等価質量比(有効質量比)とよばれ、式(7.42)から合計は1である。

1次基準振動の基部における曲げモーメントは、慣性力に高さを乗じたものの合計である。1次モードの等価高さは、その合計を等価1自由度系の慣性力で割ったものであるから

$$\begin{aligned}\bar{H}_1 &= \frac{(-m_1 \ddot{X}_{11})H_1 + (-m_2 \ddot{X}_{21})H_2}{\{-\bar{M}_1(\ddot{q}_1 + \ddot{x}_g)\}} = \frac{m_1 \phi_{11}(\ddot{u}_1 + \beta_1 \ddot{x}_g)H_1 + m_2 \phi_{21}(\ddot{u}_1 + \beta_1 \ddot{x}_g)H_2}{\beta_1(m_1 \phi_{11} + m_2 \phi_{21})(\ddot{q}_1 + \ddot{x}_g)} \\ &= \frac{m_1 \phi_{11}(\beta_1 \ddot{q}_1 + \beta_1 \ddot{x}_g)H_1 + m_2 \phi_{21}(\beta_1 \ddot{q}_1 + \beta_1 \ddot{x}_g)H_2}{(m_1 \phi_{11} + m_2 \phi_{21})(\beta_1 \ddot{q}_1 + \beta_1 \ddot{x}_g)} = \frac{m_1 \phi_{11}H_1 + m_2 \phi_{21}H_2}{m_1 \phi_{11} + m_2 \phi_{21}}\end{aligned}$$

である。したがって、せん断  $n$  質点系の  $s$  次モードの等価高さは、次式である。

$$\bar{H}_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{is} H_i}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{is}} \quad (7.44)$$

等価質量は、刺激係数と同様な意味をもっている。すなわち、地震動に対して、等価質量の大きな基準振動は、応答が大きく、逆に小さい場合には小さい傾向がある。等価質量比は、基準振動の地震動に対する応答の度をあらわしているため、その指標として有効である。モード解析の有効性は、“いくつかの低次の基準振動を重ね合わせた近似解で実用上十分である”という経済性にある。1次基準振動から数えて等価質量比(有効質量比)の合計が0.8~0.9になる基準振動までの重ね合わせで、通常、地震動に対して十分な精度が得られる。なお、全基準振動の重ね合わせは厳密解である。

### 例題 7.d 等価質量，等価質量比と等価高さ

例題 7.a と同様に、第 6 章で用いた 2 自由度のせん断建物モデル(図(6.2))について、正規化の条件で等価質量，等価質量比と等価高さを求めよう。

1次と2次のモードの等価質量は、式(7.37)にそれぞれ例題 7.c の式(c)と(d)代入すると

$$\bar{M}_1 = \beta_1^2 = \left( \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \sqrt{m} \right)^2 = \frac{3 + \sqrt{2}}{2} m = 2.207m \quad (a)$$

$$\bar{M}_2 = \beta_2^2 = \left( -\frac{2-\sqrt{2}}{2} \sqrt{m} \right)^2 = \frac{3-\sqrt{2}}{2} m = 0.793m \quad (\text{b})$$

である。それらの有効質量比は、式(7.43)よりそれぞれ

$$\bar{R}_1 = \frac{\bar{M}_1}{M} = \frac{2.207m}{2m+m} = 0.736, \quad \bar{R}_2 = \frac{\bar{M}_2}{M} = \frac{0.793m}{2m+m} = 0.264 \quad (\text{c})$$

1次と2次のモードの等価高さは、 $H_1 = H/2, H_2 = H$  とすると、式(7.44)に例題 7.b の式(a)・(b)・(c)・(d)を代入すると

$$\bar{H}_1 = \frac{m_1 \phi_{11} H_1 + m_2 \phi_{21} H_2}{m_1 \phi_{11} + m_2 \phi_{21}} = \frac{2m(1/2\sqrt{m})(H/2) + m(1/\sqrt{2m})H}{2m(1/2\sqrt{m}) + m(1/\sqrt{2m})}$$

$$\therefore \bar{H}_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} H = 0.707H \quad (\text{d})$$

$$\bar{H}_2 = \frac{m_1 \phi_{12} H_1 + m_2 \phi_{22} H_2}{m_1 \phi_{12} + m_2 \phi_{22}} = \frac{2m(-1/2\sqrt{m})(H/2) + m(1/\sqrt{2m})H}{2m(-1/2\sqrt{m}) + m(1/\sqrt{2m})}$$

$$\therefore \bar{H}_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-2} H = -0.707H \quad (\text{e})$$

である。等価高さがマイナスなのは、この等価モデルの地盤加速度が、 $-\ddot{x}_g$  であることを意味している。

### 第 3-1 部の参考文献

- [3-1.1] 有山正孝, (1996), “振動・波動”, 裳華房。
- [3-1.2] Mario Paz, (1997), “Structural Dynamics”, Chapman & Hall。
- [3-1.3] 柴田明德, (2000), “最新耐震構造解析”, 森北出版株式会社。
- [3-1.4] 寺沢徳雄, (2000), “振動と波動”, 岩波書店。
- [3-1.5] 薩摩順吉・四ツ谷晶二, (2000), “キーポイント線形代数”, 岩波書店。
- [3-1.6] 戸田盛和・浅野功義, (2000), “行列と1次変換”, 岩波書店。
- [3-1.7] 戸田盛和, (1998), “力学”, 岩波書店。
- [3-1.8] 河島佑男, (1972), “動的応答解析”, 培風館。
- [3-1.9] 川井忠彦, (1971), “マトリックス法振動および応答”, 培風館。

## 第 3-2 部 振動学と“行列”

この部では、多自由度系の振動を解析(あるいは理解)するために必要な“行列”について説明する。わかりやすいように、3次程度の行列を用いる場合が多いが、そのまま高次に拡張できる。公式は原則として証明する。ただし、簡単なものや類似のものは割愛する。

### 第 8 章 行列

#### 8.1 行列とは

$m, n$  を正の整数とすると、以下のように、 $m \times n$  個の数  $a_{ij}$  を  $m$  行、 $n$  列に配列して、かっこでまとめた

$$[A] = \begin{matrix} \left[ \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right] & \begin{matrix} 1\text{行} \\ 2\text{行} \\ \\ i\text{行} \\ \\ m\text{行} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\text{列} & 2\text{列} & & i\text{列} & & n\text{列} \end{matrix} \end{matrix} \quad (8.1)$$

を  $m$  行  $n$  列の**行列**(matrix)あるいは  $m \times n$  型行列という。 $m = n$  の場合を  $n$  次の**正方行列**という。行列を  $[ ]$  で表す。 $a_{ij}$  を行列  $[A]$  の  $(i, j)$  **成分**という。

$n$  次元の**列ベクトル**は  $n$  行 1 列の行列、 $n$  次元の**行ベクトル**は 1 行  $n$  列の行列である。ただし、この本では、ベクトルであることを明確にするために、ベクトルを  $\{ \}$  で表すことにする。

行列の成分は、ベクトルと同様に、意味が無く配列されているのではなく、配列される位置(以降、番地とよぶ)が意味を持っている。行列は、以下のように“列(あるいは行)ベクトルの集まりとして考える”と、行列の定義や演算について理解しやすい場合が多い。

$$[A] = \left[ \begin{array}{c} \{a_{11}\} \\ \{a_{21}\} \end{array} \quad \begin{array}{c} \{a_{12}\} \\ \{a_{22}\} \end{array} \quad \begin{array}{c} \{a_{13}\} \\ \{a_{23}\} \end{array} \right] = [\{a\}_1 \quad \{a\}_2 \quad \{a\}_3] \quad (8.2)$$

あるいは

$$[A] = \begin{bmatrix} \{a_{11} & a_{12} & a_{13}\} \\ \{a_{21} & a_{22} & a_{23}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{b\}_1 \\ \{b\}_2 \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

$m \times n$ 型行列 $[A]$ の $(i, j)$ 成分を $(j, i)$ 成分に移すことを“転置する”という。転置された $n \times m$ 型行列を $[A]$ の**転置行列**といい、 $[A]^T$ で表す。

$$[A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

転置の転置は元の行列に戻る。

$$([A]^T)^T = [A] \quad (8.5)$$

式(8.4)からわかるように、 $\{a\}_i$ を列ベクトルとすると、次式が成り立つ。

$$[A]^T = [\{a\}_1 \quad \{a\}_2 \quad \cdots \quad \{a\}_n]^T = \begin{bmatrix} \{a\}_1^T \\ \{a\}_2^T \\ \vdots \\ \{a\}_n^T \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

ここで、 $\{a\}_i^T$ は列ベクトルを転置したものであるから、以下に示すような行ベクトルである。

$$\{a\}_i = \begin{Bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{Bmatrix}, \quad \{a\}_i^T = \{a_{1i} \quad a_{2i} \quad \cdots \quad a_{ni}\} \quad (8.7)$$

すべての成分が0の行列を**ゼロ行列**といい、 $[0]$ で表す。

$$[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

以下に示すように、正方行列で、対角成分がすべて1、それ以外の成分が0の行列を**単位行列**といい、 $[I]$ で表す。

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

## 8.2 行列の演算と公式

### (1) 相等しい

$[A]=[B]$  は、両行列が同じ型である場合に定義でき、対応する成分がすべて等しい、すなわち  $a_{ij}=b_{ij}$  の場合である。

### (2) 和と差

$[A]\pm[B]$  は、両行列が同じ型である場合に定義でき、 $(i, j)$  成分が  $a_{ij}\pm b_{ij}$  である。

### (3) 積

すでに定義されたベクトルの積(内積)は、式(6.54)に示したように、行ベクトル  $\{a\}$  と列ベクトル  $\{b\}$  の積である。その演算は、下記のように、対応する成分どうしの積のたし合わせである。

$$\{a\}\{b\} = \{a_1 \quad a_2 \quad a_3\} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad (8.10)$$

行列  $[A]$  と列ベクトル  $\{b\}$  の積は、式(8.10)を拡張して、行列を行ベクトル  $\{a\}_i$  の集まりとして考えて、次のように定義される。

$$\begin{aligned} [A]\{b\} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{a_{11} & a_{12} & a_{13}\} \\ \{a_{21} & a_{22} & a_{23}\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \{a\}_1 \\ \{a\}_2 \end{bmatrix} \{b\} = \begin{Bmatrix} \{a\}_1\{b\} \\ \{a\}_2\{b\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8.11)$$

したがって、式(8.10)より

$$[A]\{b\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 \end{Bmatrix} \quad (8.12)$$

行列どうしの積は、さらに拡張して、左の行列  $[A]$  は行ベクトル  $\{a\}_i$  の集まり、右の行列  $[B]$  は列ベクトル  $\{b\}_i$  の集まりと考えると、その積は次のように定義される。



$$\begin{aligned}
 [A][B] &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{a_{11} & a_{12} & a_{13}\} \\ \{a_{21} & a_{22} & a_{23}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \{a\}_1 \\ \{a\}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{b\}_1 & \{b\}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{a\}_1 \{b\}_1 & \{a\}_1 \{b\}_2 \\ \{a\}_2 \{b\}_1 & \{a\}_2 \{b\}_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

したがって、式(8.10)より

$$\begin{aligned}
 [A][B] &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{8.14}$$

一般に、行列(ベクトルを含む)の積  $[C]=[A][B]$  は、 $[A]$  が  $m \times l$  型行列、 $[B]$  が  $l \times n$  型行列である場合に定義され、 $m \times n$  型行列となる。その  $(i, j)$  成分  $c_{ij}$  は、 $[A]$  の  $i$  行のベクトル  $\{a\}_i$  と  $[B]$  の  $j$  列のベクトル  $\{b\}_j$  の積である。すなわち

$$\begin{aligned}
 c_{ij} &= \{a\}_i \{b\}_j = \{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{il}\} \begin{Bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{lj} \end{Bmatrix} \\
 &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{il}b_{lj} = \sum_{k=1}^l a_{ik}b_{kj}
 \end{aligned} \tag{8.15}$$

列ベクトル  $\{b\}$  は  $n \times 1$  型行列、行ベクトル  $\{a\}$  は  $1 \times n$  型行列と考えることができるので、列ベクトルと行ベクトルの積は、以下のように定義することができる。

$$\{b\} \{a\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \{a_1 \quad a_2 \quad a_3\} = \begin{bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & b_1a_3 \\ b_2a_1 & b_2a_2 & b_2a_3 \\ b_3a_1 & b_3a_2 & b_3a_3 \end{bmatrix} \tag{8.16}$$

**例題 8.a**  $[A]^T[A]$  と  $[A]^T[B][A]$  (ただし  $[A]$  と  $[B]$  は正方行列)

$[A]$  と  $[B]$  が  $n$  次の正方行列であるとき、 $[A]^T[A]$  と  $[A]^T[B][A]$  を求めてみよう。

行列  $[A]$  は、以下のように  $n$  個の列ベクトルの集まりと考えることができる。

$$\begin{aligned}
 [A] &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \right] \\
 &= [\{a\}_1 \quad \{a\}_2 \quad \cdots \quad \{a\}_n]
 \end{aligned} \tag{a}$$

この転置行列  $[A]^T$  は、式(8.6)より

$$[A]^T = [\{a\}_1 \quad \{a\}_2 \quad \cdots \quad \{a\}_n]^T = \begin{bmatrix} \{a\}_1^T \\ \{a\}_2^T \\ \vdots \\ \{a\}_n^T \end{bmatrix} \tag{b}$$

である。ここで、 $\{a\}_i$  を  $i$  次ベクトルとよぶ。

$[A]^T [A]$  は、式(8.13)より

$$\begin{aligned}
 [A]^T [A] &= \begin{bmatrix} \{a\}_1^T \\ \{a\}_2^T \\ \vdots \\ \{a\}_n^T \end{bmatrix} [\{a\}_1 \quad \{a\}_2 \quad \cdots \quad \{a\}_n] \\
 &= \begin{bmatrix} \{a\}_1^T \{a\}_1 & \{a\}_1^T \{a\}_2 & \cdots & \{a\}_1^T \{a\}_n \\ \{a\}_2^T \{a\}_1 & \{a\}_2^T \{a\}_2 & \cdots & \{a\}_2^T \{a\}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \{a\}_n^T \{a\}_1 & \{a\}_n^T \{a\}_2 & \cdots & \{a\}_n^T \{a\}_n \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{c}$$

である。すなわち、 $[A]^T [A]$  の  $(i, j)$  成分は、 $i$  次ベクトルと  $j$  次ベクトルの内積

$$\{a\}_i^T \{a\}_j = \{a\}_i \cdot \{a\}_j \tag{d}$$

である。したがって、 $[A]^T [A]$  は対称行列である。

行列  $[A]$  でベクトルの直交性が成り立つ場合、すなわち

$$\{a\}_i^T \{a\}_j = \{a\}_i \cdot \{a\}_j = 0 \quad (i \neq j) \tag{e}$$

の場合、式(c)は以下のように対角行列となる。

$$[A]^T[A] = \begin{bmatrix} \{a\}_1^T \{a\}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \{a\}_2^T \{a\}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \{a\}_n^T \{a\}_n \end{bmatrix} \quad (f)$$

また、 $[A]^T[B][A]$ の $(i, j)$ 成分は

$$\{a\}_i^T [B] \{a\}_j \quad (e)$$

である。行列 $[A]$ の列ベクトル $\{a\}_i$ と行列 $([B][A])$ の列ベクトル $([B]\{a\}_j)$ の直交性が成り立つ場合、 $[A]^T[B][A]$ は対角行列となる。これらの証明は読者が試みられたい。

これらの演算は、振動学でよく用いられるので、その仕組みを十分に理解することは大切である。

#### (4) 演算公式

##### (a) 行列の和と差

同じ型の行列 $[A]$ 、 $[B]$ と $[C]$ に対して下式が成り立つ。

$$[A] \pm [B] = [B] \pm [A], \quad ([A] \pm [B]) \pm [C] = [A] \pm ([B] \pm [C])$$

##### (b) 行列のスカラー倍

同じ型の行列 $[A]$ と $[B]$ に対して次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} r(s[A]) &= (rs)[A], & (r+s)[A] &= r[A] + s[A] \\ r([A] + [B]) &= r[A] + s[B], & 0[A] &= [0] \end{aligned}$$

##### (c) 行列の積

$r$ を任意の数とすると、行列 $[A]$ 、 $[B]$ と $[C]$ に対して

$$\begin{aligned} (r[A])[B] &= r[A][B] = [A](r[B]), & ([A][B])[C] &= [A]([B][C]) \\ [A]([B] + [C]) &= [A][B] + [A][C], & ([B] + [C])[A] &= [B][A] + [C][A] \\ [I][A] &= [A], & [A][I] &= [A], & [0][A] &= [A][0] = [0] \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、一般に $[A][B] \neq [B][A]$ である。

### 8.3 行列の種類と性質

#### (1) 転置行列

$$([A][B])^T = [B]^T [A]^T \quad (8.17)$$

である。

式(8.13)より

$$([A][B])^T = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

である。また

$$\begin{aligned} [B]^T [A]^T &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。ゆえに式(8.17)が成り立つ。

#### (2) 逆行列

正方行列 $[A]$ に対して、 $[A][X]=[I]$ となる $[X]$ を $[A]$ の逆行列といい、 $[A]^{-1}$ で表し、次の性質がある。

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I], \quad ([A]^{-1})^{-1} = [A] \quad (8.18)$$

$$([A][B])^{-1} = [B]^{-1}[A]^{-1}, \quad ([A]^T)^{-1} = ([A]^{-1})^T \quad (8.19)$$

#### (3) 対角行列

正方行列で、対角成分以外がすべて0の行列をいい、次の性質がある。

$$[A]^T = [A] \quad (8.20)$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_n \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

$$\begin{Bmatrix} a_1x_1 \\ a_2x_2 \\ \vdots \\ a_nx_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (8.22)$$

#### (4) 対称行列

正方行列で、 $(i, j)$ 成分  $a_{ij}$  と  $(j, i)$ 成分  $a_{ji}$  が等しい行列であり、次の性質がある。

$$[A]^T = [A] \quad (8.23)$$

### 8.4 連立1次方程式の解

未知数  $x_1$ ,  $x_2$  と  $x_3$  に関する連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases} \quad (8.24)$$

は、以下のように、ベクトル・行列表示できる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (8.25)$$

すなわち

$$[A]\{x\} = \{c\} \quad (8.26)$$

ここで、 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$  と  $c_1, c_2, \dots, c_n$  は定数である。 $[A]$  を **係数行列**、 $\{x\}$  を **解ベクトル** という。一般に、連立1次方程式の解は3種類、① 1組の解がある場合、② 解が存在しない場合、③ 解が無数存在する場合、がある。

式(8.26)の両辺に逆行列  $[A]^{-1}$  を乗じると、 $[A]^{-1}[A] = [I]$  より、解  $\{x\}$  は

$$\{x\} = [A]^{-1}\{c\} \quad (8.27)$$

である。

しかし、この方法は、未知数が多くなると逆行列の計算に非常に時間がかかってしまう。それに比べて、**ガウスの消去法**は、計算時間が速く、コンピュー

タでも大いに用いられている。ガウスの消去法は、例題を解いた方がわかりやすい。以下に示す連立 1 次方程式の例題をガウスの方法で解いてみよう。

### 例題 8.b 連立 1 次方程式の 3 種類の解とガウスの消去法

#### ① 1 組の解が存在する場合

連立方程式

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 & \cdots\cdots(1) \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 & \cdots\cdots(2) \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 & \cdots\cdots(3) \end{cases} \quad (a)$$

をベクトル・行列表示すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{Bmatrix} \begin{cases} \cdots\cdots(1) \\ \cdots\cdots(2) \\ \cdots\cdots(3) \end{cases} \quad (b)$$

ガウスの消去法は、“ある式から他の式の何倍かを引いても解は変わらない”ことを利用して、係数行列の対角成分より下のすべての成分を 0 にする方法である。そのような行列を**三角行列**とよぶ。手順は、まず 1 列目の成分を 0 にし、以降、2 列目、3 列目の順番に成分を 0 にして行く。すなわち

[第 1 段階]

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 13/2 & -7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix} \begin{cases} \cdots\cdots(1) \\ \cdots\cdots(2.1) \leftarrow (2)-(1) \\ \cdots\cdots(3.1) \leftarrow (3)-(1)\times 3/2 \end{cases}$$

[第 2 段階]

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -83/10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1/5 \end{Bmatrix} \begin{cases} \cdots\cdots(1) \\ \cdots\cdots(2.1) \\ \cdots\cdots(3.2) \leftarrow (3.1)-(2.1)\times 13/10 \end{cases}$$

解は、まず最も下の式(3.2)から  $x_3 = 2/83$  が求まり、次に式(2.1)に  $x_3$  の値を代入すると  $x_2 = 66/83$  が求まり、最後に式(1)に  $x_3$  と  $x_2$  の値を代入する  $x_1 = 180/83$  が求まる。

式(a)と異なる連立 1 次方程式で、以下のように、[第 1 段階]で式(2.1)の  $x_2$  にかかる成分が 0 となってしまった場合は、上記の方法が使えない。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 13/2 & -7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{cases} 2 \\ 4 \\ 5 \end{cases} \dots\dots(1) \\ \dots\dots(2.1) \\ \dots\dots(3.1) \end{cases}$$

しかし、式を入れ換えてもかまわないから、式(2.1)と(3.1)を入れ換えると

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 13/2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{cases} 2 \\ 5 \\ 4 \end{cases} \dots\dots(1) \\ \dots\dots(3.1) \\ \dots\dots(2.1) \end{cases}$$

となり、同様な順序で、 $x_3 = 4$ 、 $x_2 = 66/13$ 、 $x_1 = 60/13$ が求まる。

## ② 解が存在しない場合

式(a)と異なる連立1次方程式で、以下のように、[第2段階]で式(3.2)の $x_3$ にかかる成分が0となった場合は

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{cases} 2 \\ 4 \\ -1/5 \end{cases} \dots\dots(1) \\ \dots\dots(2.1) \\ \dots\dots(3.2) \end{cases}$$

式(3.2)が $0x_3 = -1/5$ であるので、これを満足する解は存在しない。

## ③ 解が無数存在する場合

式(a)と異なる連立1次方程式で、以下のように、[第2段階]で式(3.2)の $x_3$ にかかる成分と右辺が0となった場合は

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{cases} 2 \\ 4 \\ 0 \end{cases} \dots\dots(1) \\ \dots\dots(2.1) \\ \dots\dots(3.2) \end{cases}$$

式(3.2)が $0x_3 = 0$ であるので、これを満足する解は無数存在する。したがって、任意の数を $t$ とすると、解は以下のとおりである。

$$x_3 = t, \quad x_2 = \frac{4-t}{5}, \quad x_1 = \frac{22-13t}{5}$$

解が無数になった理由は、方程式が見かけ上3つであるが、独立な方程式が2つしかない、すなわち2つの方程式の重ね合わせで、他の1つの方程式が作成できるためである。

固有値問題で重要な**同次連立1次方程式**(以降、同次方程式とよぶ)の解を論

じよう。同次方程式とは、式(8.25)の右辺がすべて 0 である連立 1 次方程式である。すなわち

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.28)$$

あるいは

$$[A]\{x\} = \{0\} \quad (8.29)$$

同次方程式の解は、上記の計算例からわかるように、解が存在しない場合はない。他の場合について、例題 8b と同じ計算例で右辺を 0 とした場合について考察してみよう。

### 例題 8.c 同次方程式の 2 種類の解とガウスの消去法

#### ① 1 組の解が存在する場合

[第 2 段階]

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -83/10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \cdots(1) \\ \cdots(2.1) \\ \cdots(3.2) \end{matrix}$$

解は、 $x_3 = x_2 = x_1 = 0$  である。わかりきっているので、“**自明の解**”とよばれる。

#### ③ 解が無数存在する場合

[第 2 段階]

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \cdots(1) \\ \cdots(2.1) \\ \cdots(3.2) \end{matrix}$$

解は次式である。

$$x_3 = t, \quad x_2 = \frac{-t}{5}, \quad x_1 = \frac{-13t}{5}$$

正方行列  $[A]$  に対して行列式が定義され、 $|[A]|$  と表わされる。次数が高くなると、そのままでは行列式を求めるには大変時間がかかる。しかし、上記のように求められた三角行列  $[U]$  の行列式  $|[U]|$  は、“対角成分の積”であるので簡単



に求まる。したがって、三角行列の行列式 $[[U]] \neq 0$ の場合は自明の解、 $[[U]] = 0$ の場合は解が無数あることになる。

元の行列 $[A]$ と三角行列 $[U]$ の関係を調べてみよう。行列式には、“1つの列(あるいは行)に他の列(あるいは行)の何倍かを加えても値は変わらない”と“2つの列(あるいは行)を入れ替えると値は-1倍される”性質がある。したがって、当初の係数行列を三角行列に変形していくとき、行の入れ替えのときだけ、行列式が-1倍されていく。入れ替えの回数を $k$ とすると

$$[[A]] = (-1)^k [[U]] \quad (8.30)$$

となる。 $[[A]]$ と $[[U]]$ の絶対値は等しいから、結局、同次方程式において、 $[[A]] \neq 0$ および $[[A]] = 0$ の場合は、それぞれ自明の解および無数の解が存在することになる。

## 8.5 1次変換と座標変換

変数の組 $(x_1, x_2)$ と $(y_1, y_2)$ すなわちベクトル $\{x\}$ と $\{y\}$ が

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \{y\} = [T]\{x\} \quad (8.31)$$

の関係にあるとき、“ $(x_1, x_2)$ と $(y_1, y_2)$ は**1次変換(線形変換, 線形写像)**の関係”, “ $(y_1, y_2)$ は $(x_1, x_2)$ の1次変換”あるいは“ $(x_1, x_2)$ から $(y_1, y_2)$ への1次変換”であるという。 $[T]$ を**線形変換行列(以降, 変換行列)**という。

1次変換は $f, g$ などの文字で表わし、ベクトル $\{x\}$ にベクトル $\{y\}$ が対応するとき

$$\{y\} = f(\{x\}) \quad (8.32)$$

と表現する。

1次変換 $f$ には、**線形性**という重要な性質がある。

$$\textcircled{1} \quad f(k\{x\}) = kf(\{x\}), \quad f(\{0\}) = \{0\} \quad (8.33)$$

$$\textcircled{2} \quad f(\{x\}_1 + \{x\}_2) = f(\{x\}_1) + f(\{x\}_2) \quad (8.34)$$

すなわち、 $\textcircled{1}$ ベクトルの $k$ 倍の1次変換とベクトルの1次変換の $k$ 倍とは一致する、 $\textcircled{2}$ 2つのベクトルの和に対する1次変換と各ベクトルの1次変換の和は一致する。

1次変換には、幾何学的に2つの概念が含まれる。それは、 $\textcircled{1}$ “狭義の1

次変換”すなわち“1つの座標系における異なるベクトル{x}と{y}の関係”，  
 ②“座標変換”すなわち“1つのベクトルを異なる座標系で表した数ベクトル{x}と{y}の関係”，である。

(1) 狭義の1次変換

1次変換を，“狭義の1次変換”の視点から幾何学的にとらえると，図8.1に示すように，1つの座標系において，あるベクトル $\vec{x} = \{x\}$ とそれに対応するベクトル $\vec{y} = \{y\}$ との関係を示している。あるいは，ある点 $P(x_1, x_2)$ とそれに対応する点 $Q(y_1, y_2)$ との関係を示している。

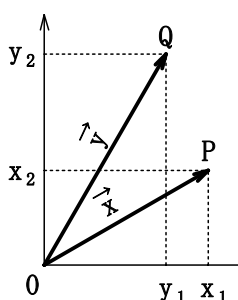


図8.1 一つの座標系における1次変換

物理的に具体性のある“狭義の1次変換”について考えてみよう。図6.1に示す“2層のせん断建物モデル”の節点1と節点2の変位 $x_1$ と $x_2$ を座標軸とする，理論上の $x_1, x_2$ 直交座標系を考える(図8.2)。

ある時刻 $t$ の変位の状態 $(x_1, x_2)$ は，ベクトル

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \tag{8.35}$$

で表すことができる。この変位に対応して復元力が定まる。節点1と節点2の復元力をそれぞれ $Q_1$ と $Q_2$ とすると，復元力の状態はベクトル

$$\vec{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \tag{8.36}$$

で表される。変位ベクトルと復元力ベクトルは

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \{Q\} = [K]\{x\} \tag{8.37}$$

の関係にある(この節で述べる 1 次変換式は、後で証明する。ここでは、読者は、それが既知である前提で読んでほしい)。すなわち、変位ベクトルと復元力ベクトルは 1 次変換の関係にある。

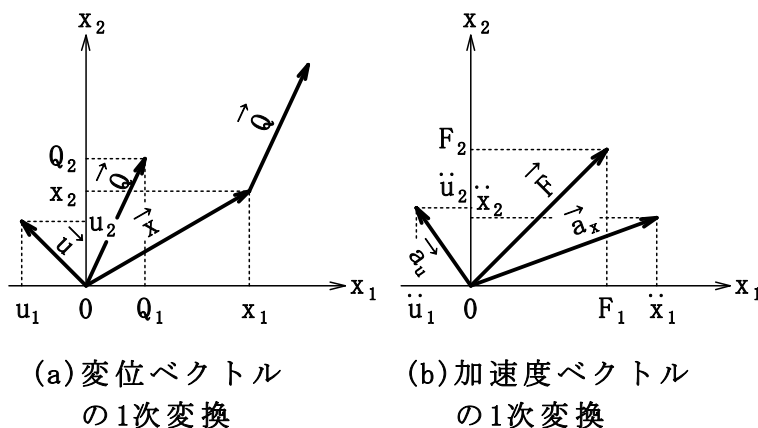


図 8.2  $x_1$   $x_2$  座標系における 1 次変換

それらを“狭義の 1 次変換”の見地で幾何学的に表したのが、図 8.2(a)である。変位ベクトルは位置ベクトルであり、復元力ベクトルはその終点を始点としたベクトルであると考えるのが物理的に妥当である。しかし、復元力ベクトルは平行移動してもかまわないから、その始点を原点に移動する。これが 1 次変換に対する幾何学上の一般的な表現である。以降、この表現を用いる。

ある時刻  $t$  のモード振動系の変位(基準座標)の状態  $(u_1, u_2)$  は、ベクトル

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{8.38}$$

で表すことができる。節点 1 と節点 2 の元の変位ベクトルとモード振動系の変位ベクトルは

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \{x\} = [A]\{u\} \tag{8.39}$$

の関係にある。すなわち、 $\{x\}$  と  $\{u\}$  は 1 次変換の関係にある(図 8.2(a))。

時刻  $t$  の元の加速度、慣性力とモード振動系の加速度の状態は、それぞれ

$$\vec{a}_x = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}, \quad \vec{a}_u = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} \tag{8.40}$$

と表すことができる。これらのベクトルは

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1 & 0 \\ 0 & -m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (8.41)$$

の関係がある。すなわち，“慣性力と元の加速度”および“元の加速度とモード座標系の加速度”は1次変換の関係にある。これらを“狭義の1次変換”の見地で幾何学的に表すと図8.2(b)である。ここで注目しなければならないことは、座標軸としては元の変位が用いられていることである。これが元の変位が一般化“座標”とよばれる理由である。

特殊な1次変換として、以下に示すように、ベクトル{x}をスカラー倍する1次変換がある。これを**相似変換**という。

$$\{y\} = k\{x\}, \quad \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{cases} y_1 = kx_1 \\ y_2 = kx_2 \end{cases} \text{ あるいは } \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (8.42)$$

相似変換は，“狭義の1次変換”の視点から見ると、図8.3に示すように、ベクトルを、方向を変えないで、大きさだけをk倍にする1次変換がある。

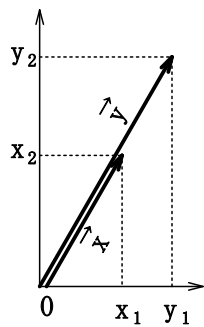


図8.3 相似変換

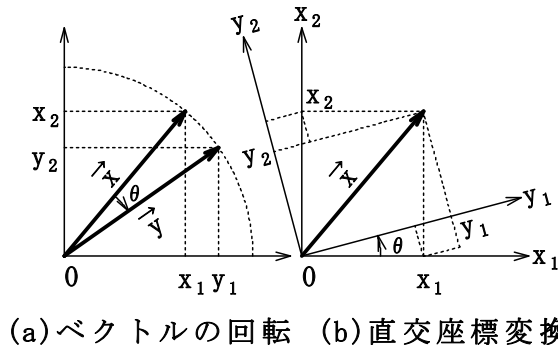


図8.4 直交変換

もう1つの特殊な1次変換として，“狭義の1次変換”の視点から見た場合、図8.4(a)に示すように、原点Oを中心としてベクトル{x}を回転させた1次変換がある。ベクトル{x}と{y}の大きさは等しいから

$$x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 \quad (8.43)$$

である。式(8.31)を(8.43)に代入すると

$$x_1^2 + x_2^2 = (t_{11}x_1 + t_{12}x_2)^2 + (t_{21}x_1 + t_{22}x_2)^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (t_{11}^2 + t_{21}^2)x_1^2 + (t_{12}^2 + t_{22}^2)x_2^2 + 2(t_{11}t_{12} + t_{21}t_{22})x_1x_2$$

$$\therefore (t_{11}^2 + t_{21}^2 - 1)x_1^2 + (t_{12}^2 + t_{22}^2 - 1)x_2^2 + 2(t_{11}t_{12} + t_{21}t_{22})x_1x_2 = 0 \quad (8.44)$$

となる。この式が任意の  $x_1, x_2$  について成り立たねばならないから

$$t_{11}^2 + t_{21}^2 = 1, \quad t_{12}^2 + t_{22}^2 = 1, \quad t_{11}t_{12} + t_{21}t_{22} = 0 \quad (8.45)$$

である。これが、1次変換がベクトルの回転となるための条件である。

変換行列を、以下のように列ベクトルの集まり

$$[T] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{Bmatrix} \end{bmatrix} = [\{t\}_1 \quad \{t\}_2] \quad (8.46)$$

と考えると(行ベクトルの集まりと考えても同様の結果となる)、式(8.45)は

$$\begin{cases} t_{11}^2 + t_{21}^2 = \{t\}_1^T \{t\}_1 = \{t\}_1 \cdot \{t\}_1 = 1 \\ t_{12}^2 + t_{22}^2 = \{t\}_2^T \{t\}_2 = \{t\}_2 \cdot \{t\}_2 = 1 \\ t_{11}t_{12} + t_{21}t_{22} = \{t\}_1^T \{t\}_2 = \{t\}_1 \cdot \{t\}_2 = 0 \end{cases} \quad (8.47)$$

である。すなわち、各ベクトルの大きさが 1 であり、直交性(異なるベクトルの内積が 0)が成り立つ。したがって、例題 8.a の式(c)より

$$[T]^T [T] = \begin{bmatrix} \{t\}_1^T \\ \{t\}_2^T \end{bmatrix} [\{t\}_1 \quad \{t\}_2] = \begin{bmatrix} \{t\}_1^T \{t\}_1 & \{t\}_1^T \{t\}_2 \\ \{t\}_2^T \{t\}_1 & \{t\}_2^T \{t\}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [T]^T [T] = [I] \quad (8.48)$$

である。このような行列  $[T]$  を **直交行列** といい、その場合の 1 次変換を **直交変換** という。すなわち、1 次変換が直交変換(ベクトルの回転)となるための条件は、変換行列が直交行列であること である。また、式(8.48)に右から逆行列  $[T]^{-1}$  を乗じると

$$[T]^T [T][T]^{-1} = [I][T]^{-1}, \quad \therefore [T]^T = [T]^{-1} \quad (8.49)$$

となる。すなわち、直交行列の転置行列と逆行列は一致する。

## (2) 座標変換

1次変換を“座標変換”としてもとらえることもできる。すなわち、図 8.4(b)に示すように、1つのベクトル $\vec{x}$ について、 $x_1x_2$ 直交座標系で表した数ベクトル $\{x\}$ を、 $y_1y_2$ 座標系で表し直した数ベクトルが $\{y\}$ である。この $y_1y_2$ 座標系は、一般に斜交座標系である(参考文献[3-2.3])。ただし、 $[T]$ が直交行列の場合だけ、直交座標系となる。振動学では主に直交座標変換だけを用いるので、以降、それだけを論じる。

$[T]$ が直交行列の場合、式(8.31)は、“狭義の1次変換”の視点にたつと、1つの直交座標系におけるベクトル $\vec{x}$ の回転である(図 8.4(a))。しかし、“座標変換”の視点にたつと、それは、図 8.4(b)に示すように、ベクトル $\vec{x}$ をそのままにして、座標軸の方を逆方向に同じ角度だけ回転させた“直交座標変換”である。

$x_1$ 軸を時計と逆方向に $\theta$ だけ回転させたとき $y_1$ 軸に一致したとする。図 8.4(b)からわかるように

$$y_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \quad y_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \quad (8.50)$$

すなわち

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (8.51)$$

の関係がある。

モード振動系の変位 $(u_1, u_2)$ が基準座標とよばれる理由を説明しよう。図 6.1に示す“2層のせん断建物モデル”の運動方程式(6.2)は、元の変位 $(x_1, x_2)$ を次のように変数変換

$$X_1 = \sqrt{m_1}x_1, \quad X_2 = \sqrt{m_1}x_2 \quad (8.52)$$

すると

$$\begin{cases} \sqrt{m_1}\ddot{X}_1 + \frac{k_1+k_2}{\sqrt{m_1}}X_1 - \frac{k_2}{\sqrt{m_2}}X_2 = f_1(t) \\ \sqrt{m_2}\ddot{X}_2 - \frac{k_2}{\sqrt{m_1}}X_1 + \frac{k_2}{\sqrt{m_2}}X_2 = f_2(t) \end{cases} \quad (8.53)$$

となる。これに対するモード振動系の変位 $(u_1, u_2)$ の変換式を

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \{X\} = [\Phi]\{u\} \quad (8.54)$$

とする。 $\phi_{11}$ と $\phi_{21}$ あるいは $\phi_{12}$ と $\phi_{22}$ は、比率が一定であれば任意に定めることができるので、 $[\Phi]$ が直交行列になるように定めると、式(8.54)は直交座標変換となり、さらに、図 8.5 に示すように、原点を共有した  $X_1X_2$ 座標系と  $u_1u_2$ 座標系において、慣性力ベクトル  $\vec{F}$ ・復元力ベクトル  $\vec{Q}$ ・外力ベクトル  $\vec{f}$ なども、それぞれ 1 つのベクトルとして表わすことができる。これが、 $u_1, u_2$ も基準“座標”とよばれる理由である。この詳細は、第 19 章で述べる。

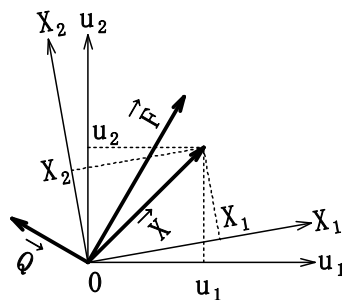


図 8.5 基準座標

1 次変換の概念をまとめよう。“狭義の 1 次変換”と“座標変換”は本質的に同じであり、幾何学的な視点が異なるだけである。前者は“1 つの直交座標系におけるベクトルの移動であり”，後者は“ベクトルを固定したままの座標系の移動で一般に斜交座標系となる”。変換行列が直交行列になる 1 次変換は、前者が“ベクトルの回転となり”，後者が“直交座標変換となる”。1 次変換について、一般の本では、このように厳密に用いられていないが、上記の意味をよく理解すれば混乱しないであろう。

### 第 3-2 部の参考文献

- [3-2.1] 矢野健太郎・石原繁，(1994)，“線形代数”，裳華房。
- [3-2.2] 戸田盛和・浅野功義，(2000)，“行列と 1 次変換”，岩波書店。
- [3-2.3] 薩摩順吉・四ツ谷晶二，(2000)，“キーポイント線形代数”，岩波書店。

## 第 3-3 部 せん断建物モデルのモード解析

この部では、多自由度系における単純なモデルである“せん断建物モデル”を用いて、モード解析の基本的事項を学ぶ。

### 第 9 章 剛性，減衰および質量マトリックスの概念と運動方程式の構築

運動方程式を構築するためには，“動的につり合っている力”を“変位とその導関数”によって記述しなければならない。この章では、まず、そのために必要な剛性，減衰と質量マトリックスの概念と作成方法を述べる。最後に、それらを用いて運動方程式を構築する。解析モデルとしては、3 自由度のせん断建物モデルを用いるが、そのまま多自由度のせん断建物モデルへ拡張できる。

#### 9.1 動的な力のつり合い

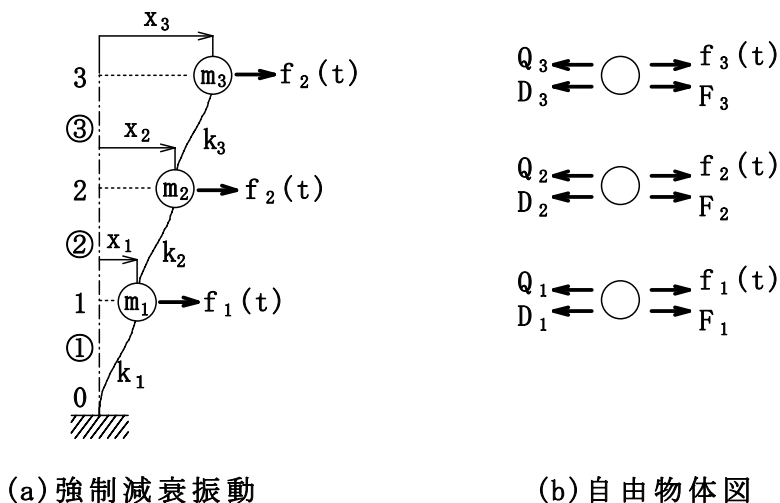


図 9.1 3 自由度のせん断建物モデル

図 9.1(a)と(b)は、それぞれ 3 自由度のせん断建物モデルの減衰強制振動と自由物体図を表わしている。変位  $\{x\}$ ，外力  $\{f(t)\}$ ，慣性力  $\{F\}$ ，復元力  $\{Q\}$  と減衰力  $\{D\}$  は、以下のとおりである。



$$\begin{aligned} \{x\} &= \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, & \{f\} &= \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{Bmatrix} & \{F\} &= \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{節点1} \\ \leftarrow \text{節点2} \\ \leftarrow \text{節点3} \end{array} \\ \{Q\} &= \begin{Bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ Q_3(t) \end{Bmatrix} & \{D\} &= \begin{Bmatrix} D_1(t) \\ D_2(t) \\ D_3(t) \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{節点1} \\ \leftarrow \text{節点2} \\ \leftarrow \text{節点3} \end{array} \end{aligned} \quad (9.1)$$

図 9.1(b)に示すように、各節点では、外力、慣性力、復元力と減衰力が、動的につり合っている。正の方向を、変位、速度、加速度、慣性力と外力は右方向、復元力と減衰力は左方向とすると、動的な力のつり合いは

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}}_{\text{慣性力}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}}_{\text{復元力}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}}_{\text{減衰力}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}}_{\text{外力}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{節点1} \\ \leftarrow \text{節点2} \\ \leftarrow \text{節点3} \end{array} \quad (9.2)$$

あるいは

$$\{F\} - \{Q\} - \{D\} + \{f\} = \{0\} \quad (9.3)$$

である。これらの式を解くためには、既知の外力以外の復元力、減衰力と慣性力を、変位とその導関数によって記述しなければならない。

## 9.2 剛性マトリックス

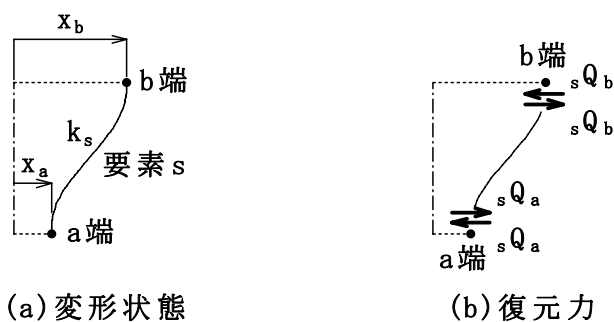


図9.2 要素の復元力

### (1) 要素の剛性マトリックス

図 9.2(a)に示すように、要素  $s$  の  $a$  端と  $b$  端の変位をそれぞれ  $x_a$  と  $x_b$  とする。要素  $s$  には、図 9.2(b)に示すように、変形によって  $a$  端と  $b$  端に対して復元力  ${}_sQ_a$

と  ${}_s Q_b$  を生じる。これらの復元力は、両端の変位によって定まる。したがって、復元力は、変位によって記述することができる。

要素の中間には力は作用しないから

$${}_s Q_a + {}_s Q_b = 0 \tag{9.4}$$

である。復元力の大きさは、要素の両端の相対変位に比例するから

$${}_s Q_a = k_s (x_a - x_b) = k_s x_a - k_s x_b \tag{9.5}$$

である。ここで、 $k_s$  は要素の剛性である。式(9.5)を(9.4)に代入すると

$${}_s Q_b = -k_s x_a + k_s x_b \tag{9.6}$$

となる。すなわち、要素の復元力ベクトル  ${}_s \{Q\}$  と変位ベクトル  ${}_s \{x\}$  は

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} {}_s Q_a \\ {}_s Q_b \end{matrix} \right\} \\ \text{要素の復元} \\ \text{力ベクトル} \end{matrix} = \begin{matrix} \left[ \begin{matrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{matrix} \right] \\ \text{要素の剛性} \\ \text{マトリックス} \end{matrix} \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} x_a \\ x_b \end{matrix} \right\} \\ \text{要素の変位} \\ \text{ベクトル} \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow a\text{端} \\ \leftarrow b\text{端} \end{matrix} \tag{9.7}$$

あるいは

$${}_s \{Q\} = {}_s [K] \cdot {}_s \{x\} \tag{9.8}$$

の関係がある。1つのバネにおける復元力  $Q$  と変位  $x$  の関係  $Q = kx$  において、 $k$  は剛性とよばれていることから、 ${}_s [K]$  を要素  $s$  の **剛性マトリックス** (stiffness matrix) とよぶ。また、式(9.8)を **剛性方程式** という。その各成分の番地は、以下に示すように、たとえば、1行2列の成分は、 $b$  端の変位  $x_b$  を乗じると、 $a$  端の復元力  ${}_s Q_a$  の一部となることを意味する。

$${}_s [K] = \begin{matrix} x_a & x_b \\ \left[ \begin{matrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{matrix} \right] \begin{matrix} {}_s Q_a \\ {}_s Q_b \end{matrix} \end{matrix} \tag{9.9}$$

## (2) 系の剛性マトリックス

要素の剛性マトリックスが求まると、系の剛性マトリックスを求めることは簡単である。要素1、要素2と要素3の剛性マトリックスは、式(9.9)から

$${}_1 [K] = \begin{matrix} x_0 & x_1 \\ \left[ \begin{matrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{matrix} \right] \begin{matrix} {}_s Q_0 \\ {}_s Q_1 \end{matrix} \end{matrix}, \quad {}_2 [K] = \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \left[ \begin{matrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{matrix} \right] \begin{matrix} {}_s Q_1 \\ {}_s Q_2 \end{matrix} \end{matrix}, \quad {}_3 [K] = \begin{matrix} x_2 & x_3 \\ \left[ \begin{matrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{matrix} \right] \begin{matrix} {}_s Q_2 \\ {}_s Q_3 \end{matrix} \end{matrix} \tag{9.10}$$

である。つぎに、以下に示すように、系の剛性マトリックス  $[K]$  の枠を決める。

その場合、拘束された変位  $x_0 (= 0)$  は既知であるので、通常、それを除外する。  
なぜならば、その方がその後の解析の手間が省けるからである。

$$[K] = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline k_{11} & k_{12} & k_{13} & Q_1 \\ \hline k_{21} & k_{22} & k_{23} & Q_2 \\ \hline k_{31} & k_{32} & k_{33} & Q_3 \end{array}$$

このマトリックスの番地と一致する各要素の成分を重ね合わせれば、以下に示す“系の剛性マトリックス”となる。このことは、前記の番地の意味を理解していれば、自ずからわかることである。

$$[K] = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline k_{11} & k_{12} & k_{13} & Q_1 \\ \hline k_{21} & k_{22} & k_{23} & Q_2 \\ \hline k_{31} & k_{32} & k_{33} & Q_3 \end{array} = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline k_1+k_2 & -k_2 & 0 & Q_1 \\ \hline -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & Q_2 \\ \hline 0 & -k_3 & k_3 & Q_3 \end{array} \quad (9.11)$$

したがって、系の復元力と変位の関係は

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (9.12)$$

あるいは

$$\{Q\} = [K]\{x\} \quad (9.13)$$

である。結局、復元力を変位で記述するためには、剛性マトリックスを求めればよい。

ここで、系の剛性マトリックスの成分について、物理的な意味を考えてみよう。系の剛性方程式は下記のように変形できる。

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \end{Bmatrix} x_1 + \begin{Bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ k_{32} \end{Bmatrix} x_2 + \begin{Bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \\ k_{33} \end{Bmatrix} x_3 \quad (9.14)$$

図 9.3(a)に示すように、節点 1 の変位だけが単位長さ、すなわち  $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$  になるように外力を加えると、外力、復元力と剛性の関係は、図 9.3(a)の自由物体図および式(9.14)から

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \end{Bmatrix} \times 1, \quad \therefore k_{11} = Q_1 = P_1, \quad k_{21} = Q_2 = P_2, \quad k_{31} = Q_3 = P_3$$

となる。すなわち、第 1 列の成分  $k_{11}$ 、 $k_{21}$  と  $k_{31}$  は、節点 1、節点 2 と節点 3 の復元力(あるいは外力)である。

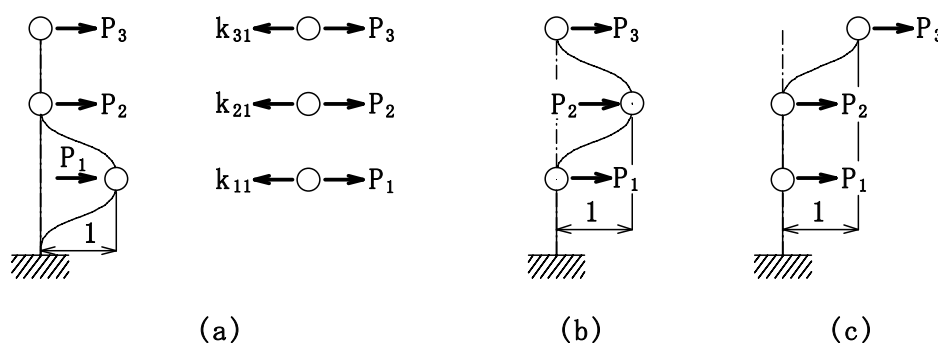


図 9.3 剛性マトリックスの成分の物理的意味

同様に、第 2 列の成分  $k_{12}$ 、 $k_{22}$  と  $k_{32}$  は、図 9.3(b)に示すように、節点 2 の変位だけが単位長さになるように外力を加えた場合の節点 1、節点 2 と節点 3 の復元力(外力)である。また、第 3 列の成分  $k_{13}$ 、 $k_{23}$  と  $k_{33}$  は、図 9.3(c)に示すように、節点 3 の変位だけが単位長さになるように外力を加えた場合の節点 1、節点 2 と節点 3 の復元力(あるいは外力)である。

以上のことから、系の剛性マトリックスの成分  $k_{ij}$  は、節点  $j$  だけを単位長さだけ変位させたとき、節点  $i$  に作用する復元力(あるいは外力)である。また、剛性マトリックスは、相反作用の定理( $i$  点に作用する外力  $P$  によって生じる  $j$  点の変位は、 $j$  点に作用する等しい外力  $P$  によって生じる  $i$  点の変位に等しい)から対称行列である。

### 9.3 減衰マトリックス

多自由度系においても、減衰力は、通常、要素の両端の相対速度に比例すると仮定する。系の減衰力と速度の関係は、式(9.12)の復元力と変位をそれぞれ減衰力と速度に置き換えればよい。したがって、減衰力ベクトル  $\{D\}$  と速度ベクトル  $\{\dot{x}\}$  は、以下の関係があり、結局、減衰力を速度で記述するためには、

減衰マトリックスを求めればよい。

$$\{D\} = [C]\{\dot{x}\} \tag{9.15}$$

しかし，“個々の要素の減衰係数から求めた系の減衰力”と“実際の系全体の減衰力”はかなり異なり，通常，要素の減衰マトリックスから系の減衰マトリックスから求めることをしない。このことは，振動理論における最大の問題点であるので，第 11 章で詳しく述べる。

### 9.4 質量マトリックス

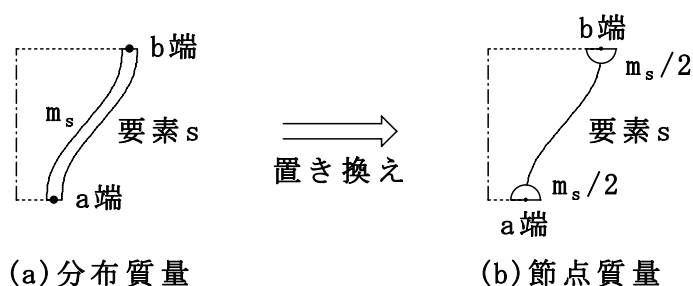


図 9.4 要素の分布質量を節点質量へ変換

バネ・マスモデルで動的解析するためには，図 9.4 に示すように，要素の分布している質量を節点に集中させる必要がある。それには 2 つの方法ある。すなわち，図 9.4(b) に示す要素の質量の半分ずつを両端の節点に分配する **ランプト・マス** (lumped mass) と，エネルギーとして等価に分配する **コンシステント・マス** (consistent mass) である。前者に比べて後者の方の計算精度が高い。図 9.4(b) で節点質量が半円となっているのは，節点に分配される質量は，他の要素の分布質量も存在することを表わしている。ランプト・マスおよびコンシステント・マスは，それぞれ質量マトリックスの“概念”および“深い意味”を理解するために適当である。ここでは，単純なランプト・マスだけを説明する。コンシステント・マスは第 12 章で述べる。

#### (1) 要素の質量マトリックス

この本では，一つの要素の断面は一定とする。要素の分布質量の合計を  $m_s$  とすると，ランプト・マスは， $a$  端と  $b$  端に分配させる質量はそれぞれ  $m_s/2$  であるから，要素  $s$  の  $a$  端と  $b$  端の慣性力  ${}_sF_a$  と  ${}_sF_b$  は

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} {}_s F_a \\ {}_s F_b \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{要素の慣性} \\ \text{力ベクトル}}} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2}m_s\ddot{x}_a \\ -\frac{1}{2}m_s\ddot{x}_b \end{Bmatrix} = -\underbrace{\begin{bmatrix} m_s/2 & 0 \\ 0 & m_s/2 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{要素の質量} \\ \text{マトリックス}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}_a \\ \ddot{x}_b \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{要素の加速} \\ \text{度ベクトル}}} \quad \begin{matrix} \leftarrow a\text{端} \\ \leftarrow b\text{端} \end{matrix} \quad (9.16)$$

となる。すなわち、要素の慣性力ベクトルと加速度ベクトルの関係は

$${}_s \{F\} = - {}_s [M] \cdot {}_s \{\ddot{x}\} \quad (9.17)$$

である。質点の慣性力  $F$  と加速度  $\ddot{x}$  の関係  $F = m\ddot{x}$  において、 $m$  は質量とよばれることから、 ${}_s [M]$  を、要素  $s$  の **質量マトリックス** (mass matrix) とよぶ。各番地の意味は以下のとおりである。

$${}_s [M] = \begin{bmatrix} m_s/2 & 0 \\ 0 & m_s/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ddot{x}_a \\ \ddot{x}_b \end{matrix} \begin{matrix} {}_s F_a \\ {}_s F_b \end{matrix} \quad (9.18)$$

## (2) 系の質量マトリックス

せん断建物モデルにおいて、図 9.5 に示すように、要素①、②と③の質量(柱および壁の質量)をそれぞれ  $m_1$ 、 $m_2$  と  $m_3$  し、節点 1, 2 と 3 の元々の集中質量(天井および床の質量)を  $M_1$ 、 $M_2$  と  $M_3$  とすると、系の質量マトリックスは、各要素の質量マトリックスと各集中質量を重ね合わせることによって求めることができる。すなわち

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1/2 + m_2/2 + M_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2/2 + m_3/2 + M_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3/2 + M_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{matrix} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \quad (9.19)$$

である。ただし、建築の耐震設計では、通常、最下層の要素①の全質量が節点 1 に集中するとして安全側に設計する。

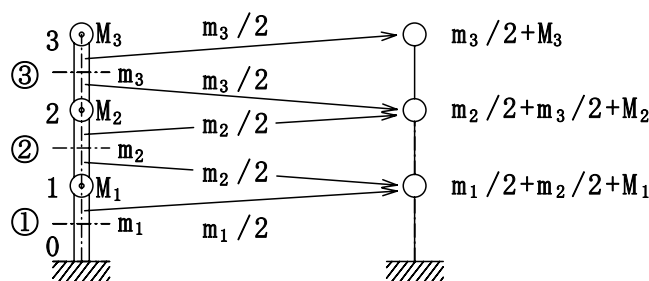
したがって、系の慣性力ベクトルと加速度ベクトルの関係は

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1/2 + m_2/2 + M_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2/2 + m_3/2 + M_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3/2 + M_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} \quad (9.20)$$

あるいは

$$\{F\} = -[M]\{\ddot{x}\} \tag{9.21}$$

である。結局、慣性力を加速度で記述するためには質量マトリックスを求めればよい。



(a) 分布質量 (b) 節点質量への置き換え

図9.5 ランプト・マス

## 9.5 運動方程式の構築

### (1) 減衰強制振動

この減衰強制振動は、地震以外の外力による強制振動を意味する。したがって、系の拘束節点が絶対座標系に対して固定され、拘束されていない節点の変位  $\{x\}$  は絶対変位である。この減衰強制振動の運動方程式は、動的な力のつり合い式(9.3)に、式(9.13)・(9.15)・(9.21)を代入することによって求まる。

$$(-[M]\{\ddot{x}\}) - [K]\{x\} - [C]\{\dot{x}\} + \{f\} = \{0\} \tag{9.22}$$

この式を移項すると、振動学で一般に用いられる運動方程式

$$\underbrace{[M]\{\ddot{x}\}}_{\text{慣性力}} + \underbrace{[C]\{\dot{x}\}}_{\text{減衰力}} + \underbrace{[K]\{x\}}_{\text{復元力}} = \underbrace{\{f\}}_{\text{外力}} \tag{9.23}$$

となる。慣性力は厳密には  $(-[M]\{\ddot{x}\})$  であるが、振動学では習慣的に  $[M]\{\ddot{x}\}$  を慣性力とよぶ場合が多い。この本では、以降、できるだけ前者で表現するが、かえって煩雑になる場合は後方で表現し、それを“振動学の慣性力”とよぶことにする。

非減衰振動あるいは自由振動の場合は、それぞれ減衰力の項あるいは外力の項を式(9.23)から除けばよい。

### (2) 地震に対する減衰応答

地震の場合、系の拘束節点は地盤に対して固定されている。地震による地盤

の絶対加速度を  $\ddot{x}_g$  とし、拘束節点以外の各節点の地盤に対する相対変位を  $\{x\}$  とすると、その運動方程式は、式(9.23)において、復元力と減衰力はそれぞれ地盤に対する相対変位と相対速度に対するものであるからそのままであり、外力は 0 である。しかし、慣性力  $\{F\}$  は、絶対加速度に対するものであるから

$$\begin{aligned} \{F\} &= -[M] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 + \ddot{x}_g \\ \ddot{x}_2 + \ddot{x}_g \\ \vdots \end{Bmatrix} = -[M] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} - [M] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_g \\ \ddot{x}_g \\ \vdots \end{Bmatrix} \\ &= -[M] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} - [M] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{Bmatrix} \ddot{x}_g \end{aligned}$$

$$\therefore \{F\} = -[M]\{\ddot{x}\} - [M]\{1\}\ddot{x}_g \quad (9.24)$$

である。式(9.23)で慣性力を式(9.24)に入れ替え、さらに  $\{f\} = \{0\}$  を代入し、移項すると

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = -[M]\{1\}\ddot{x}_g \quad (9.25)$$

となる。式(9.25)は、減衰強制振動の式(9.23)で、見かけ上、外力  $\{f\}$  を  $-[M]\{1\}\ddot{x}_g$  に置きかえたものに等しい。しかし、式(9.23)の  $\{\ddot{x}\}$  は絶対加速度であり、式(9.25)の  $\{\ddot{x}\}$  は相対加速度であることに注意しなければならない。

“一般に提供されている動的解析プログラム”による地震応答の解析結果の出力は、通常、加速度は絶対加速度、速度は相対速度、変位は相対変位である。

## 9.6 要約

多自由度系の運動方程式は、動的な力のつり合い式における慣性力、減衰力と復元力を、それぞれ加速度、速度と変位で記述することによって求めることができる。それらの力を変位あるいはその導関数で記述するためには、それぞれ系の剛性、減衰と質量マトリックスを求めなければならない。系の剛性と質量マトリックスは、各要素の剛性と質量マトリックスから、重ね合わせによって求めることができる。ただし、系の減衰マトリックスは、通常、別な方法で求める。したがって、運動方程式を構築するために必要な主要な作業は、要素の質量マトリックスと剛性マトリックスを求めることである。



## 第 10 章 非減衰振動のモード解析

この章では、非減衰自由振動および調和地盤動に対する非減衰応答についてモード解析を実施し、実際のモード解析を実感する。解析は、図 10.1 に示す 2 自由度のせん断建物モデルを用いるが、そのまま多自由度のせん断建物モデルへ拡張できる。

図 10.1 の解析モデルの剛性と質量マトリックスは、式(9.11)と(9.19)より

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \end{matrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix} \quad (10.1)$$

である。ここで、 $k_1$  と  $k_2$  は要素 1 と要素 2 の剛性、 $m_1$  と  $m_2$  は節点 1 と節点 2 の質量(要素の分布質量は節点質量に置き換えられている)である。

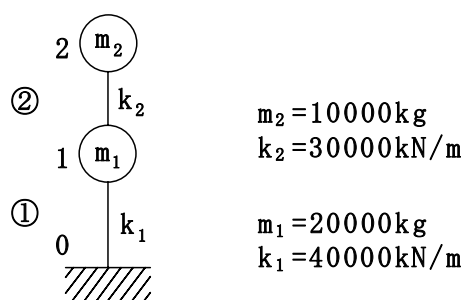


図10.1 2自由度のせん断建物モデル

### 10.1 非減衰自由振動

非減衰自由振動の運動方程式は、式(9.23)で  $[C] = [0], \{f\} = \{0\}$  を代入した

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

あるいは

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10.2)$$

である。

元の変位  $\{x\}$  と基準座標  $\{u\}$  の関係(変数変換式)は、式(6.15)より

$$\{x\} = [\Phi]\{u\} = \begin{bmatrix} \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 \end{bmatrix} \{u\}$$

あるいは

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\{ \phi_{11} \right\} & \left\{ \phi_{12} \right\} \\ \left\{ \phi_{21} \right\} & \left\{ \phi_{22} \right\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (10.3)$$

である。ここで、 $\{\phi\}_1$ と $\{\phi\}_2$ はそれぞれ1次と2次の**モードベクトル**である。 $[\Phi]$ を**モードマトリックス**という。

### (1) 固有値解析

固有円振動数 $\omega_1, \omega_2$ とモードベクトル $\{\phi\}_1, \{\phi\}_2$ を求めるために、式(6.27)で示したように、それぞれ $\omega$ と $\{\phi\}$ に置き換え、また、 $u$ は1自由度系の非減衰自由振動であるから

$$\{x\} = \{\phi\}u \quad \text{あるいは} \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}u, \quad u = A \cos(\omega t + \theta) \quad (10.4)$$

である。ここで、 $A$ と $\theta$ は初期条件から定まる定数である。式(10.4)を2回連続して微分すると

$$\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{\phi\} A \cos(\omega t + \theta) \quad \text{あるいは} \quad \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = -\omega^2 \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} A \cos(\omega t + \theta) \quad (10.5)$$

となる。式(10.4)・(10.5)を(10.2)に代入すると

$$([K] - \omega^2 [M])\{\phi\} A \cos(\omega t + \theta) = \{0\}$$

あるいは

$$\left( \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} A \cos(\omega t + \theta) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

となる。 $A \cos(\omega t + \theta) \neq 0$ を消去すると

$$([K] - \omega^2 [M])\{\phi\} = \{0\} \quad (10.6)$$

あるいは

$$\left( \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10.7)$$

となる。**固有値** $\omega^2$ と**モードベクトル** $\{\phi\}$ を求める問題を**固有値問題**という。

式(10.7)が $\{\phi\}$ が自明でない(振動する)解を持つためには、行列式が

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (10.8)$$

あるいは

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{vmatrix} - \omega^2 \begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (10.9)$$

でなければならない。これは、固有円振動数 $\omega$ を決める方程式であるので、**特性方程式**(characteristic equation)とよばれる。

この多項式を計算する方法として、**ヤコビ法**(Jacobi Method)、**サブスペース法**(Subspace Iteration Method)や**ハウスホルダー法**(Householder Method)などがある(これらを説明するためには、かなりの紙面を要し、またモード解析の概念には直接には関係しないので、この紹介にとどめる)。

なお、コンピュータで計算する場合、固有値問題は標準形に変換して固有値解析が行われる。標準形固有値問題は第 19 章で説明する。

### 例題 10.a 特性方程式

“図 10.1 の問題”について特性方程式を解き、固有円振動数とモードベクトルを求めよう。

特性方程式(10.9)は

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2 = 0$$

$$\therefore m_1 m_2 \omega^4 - \{m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)\} \omega^2 + (k_1 + k_2) k_2 - k_2^2 = 0 \quad (a)$$

である。

式(a)に、図 10.1 に示す数値を代入すると下式となる。

$$2.0 \times 10^8 \omega^4 - 1.3 \times 10^{12} \omega^2 + 1.2 \times 10^{15} = 0$$

これを解くと、1次モードと2次モードの固有円振動数が、以下のように求まる。

$$\omega_1 = 33.38 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 73.39 \text{ rad/s} \quad (b)$$

つぎに、モードベクトルを求めよう。同次方程式(10.7)の第1式と第2式は、係数行列の行列式が0であるので、同じ式である。第2式を用いると

$$-k_2\phi_1 + (k_2 - \omega^2 m_2)\phi_2 = 0$$

$$\therefore \phi_1 / \phi_2 = (k_2 - \omega^2 m_2) / k_2$$

となる。  $\omega_1 = 33.38\text{rad/s}$  を代入すると

$$\phi_{11} / \phi_{21} = 0.6286$$

となる。モードベクトルの大きい方の成分  $\phi_{21}$  を 1 とすると、1 次モードベクトルは

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6286 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

となる。同様に  $\omega_2 = 73.39\text{rad/s}$  を代入すると

$$\phi_{12} / \phi_{22} = -0.7954$$

となる。したがって、2 次モードベクトルは

$$\{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.7954 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (d)$$

である。図 10.a にモード図を示す。

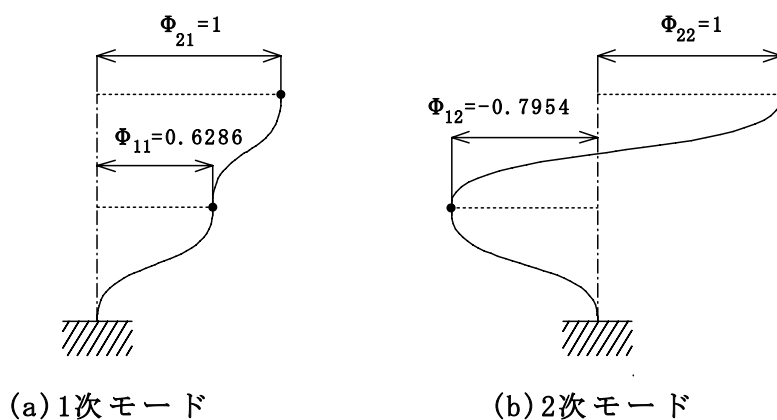


図 10. a モード図

モードマトリックスは、式(10.3)より

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6286 & -0.7954 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (e)$$

である。ゆえに、元の変位  $\{x\}$  と基準座標  $\{u\}$  の変数変換式は、式(10.3)より

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6286 & -0.7954 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

である。

## (2) 連成しない方程式の構築

運動方程式(10.2)に変数変換式(10.3)を代入して、さらに左からモードマトリックスの転置を乗じると

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{u}\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{u\} = 0$$

あるいは

$$\begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T \\ \{\phi\}_2^T \end{bmatrix} [M] \begin{bmatrix} \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T \\ \{\phi\}_2^T \end{bmatrix} [K] \begin{bmatrix} \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.10)$$

$$\begin{aligned} \therefore & \begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T [M] \{\phi\}_1 & \{\phi\}_1^T [M] \{\phi\}_2 \\ \{\phi\}_2^T [M] \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2^T [M] \{\phi\}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_1 & \{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_2 \\ \{\phi\}_2^T [K] \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2^T [K] \{\phi\}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (10.11)$$

となる(例題 8.a 参照)。ここで、以降の解析に必要な“モードベクトルの直交性”について一般的な証明をしよう。

“モードベクトルの直交性”とは、 $i \neq j$ の場合

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = 0, \quad \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j = 0 \quad (10.12)$$

である。

相異なる  $i$  次と  $j$  次モードベクトルを  $\{\phi\}_i$  と  $\{\phi\}_j$  とすると、式(10.6)より

$$\omega_i^2 [M] \{\phi\}_i = [K] \{\phi\}_i \quad (10.13)$$

$$\omega_j^2 [M] \{\phi\}_j = [K] \{\phi\}_j \quad (10.14)$$

である。 $\omega_i$  と  $\omega_j$  は  $i$  次モードと  $j$  次モードの固有円振動数である。

式(10.14)の左から  $i$  次モードベクトルの転置  $\{\phi\}_i^T$  を左から乗じると

$$\omega_j^2 \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j \quad (10.15)$$

となる。式(10.13)の全体を転置し、右から  $j$  次モードベクトル  $\{\phi\}_j$  を乗じると

$$(\omega_i^2 [M] \{\phi\}_i)^T \{\phi\}_j = ([K] \{\phi\}_i)^T \{\phi\}_j$$

となる。 $([A][B])^T = [B]^T [A]^T$  であることと、 $[M]$  と  $[K]$  が対称行列なので転置しても変わらないことを考慮すると、次式となる。

$$\omega_i^2 \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j \quad (10.16)$$

式(10.15)から式(10.16)を引くと

$$(\omega_j^2 - \omega_i^2) \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = 0 \quad (10.17)$$

となる。 $\omega_i \neq \omega_j$  であるから

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = 0 \quad (10.18)$$

となる。これが“質量に対するモードベクトルの直交性”である。式(10.18)を式(10.16)に代入すると

$$\{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j = 0 \quad (10.19)$$

となる。これが“剛性に対するモードベクトルの直交性”である。

この“モードベクトルの直交性”を式(10.10)および(10.11)に適用すると、加速度ベクトル  $\{\ddot{u}\}$  と変位ベクトル  $\{u\}$  の掛かる行列は、対角成分以外が 0 となるので

$$\begin{cases} [M]^* = [\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T [M] \{\phi\}_1 & 0 \\ 0 & \{\phi\}_2^T [M] \{\phi\}_2 \end{bmatrix} \\ [K]^* = [\Phi]^T [K] [\Phi] = \begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_1 & 0 \\ 0 & \{\phi\}_2^T [K] \{\phi\}_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (10.20)$$

となる。したがって、式(10.11)は、連成しない方程式

$$\begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T [M] \{\phi\}_1 & 0 \\ 0 & \{\phi\}_2^T [M] \{\phi\}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_1 & 0 \\ 0 & \{\phi\}_2^T [K] \{\phi\}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.21)$$

$$\therefore \begin{cases} \{\phi\}_1^T [M] \{\phi\}_1 \ddot{u}_1 + \{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_1 u_1 = 0 \\ \{\phi\}_2^T [M] \{\phi\}_2 \ddot{u}_2 + \{\phi\}_2^T [K] \{\phi\}_2 u_2 = 0 \end{cases} \quad (10.22)$$

となる。すなわち、モード振動系の運動方程式となる。したがって、 $m_1^* = \{\phi\}_1^T [M] \{\phi\}_1$  と  $k_1^* = \{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_1$  は、それぞれ 1 次モードの一般化質量と一般化剛性である。また、 $m_2^* = \{\phi\}_2^T [M] \{\phi\}_2$  と  $k_2^* = \{\phi\}_2^T [K] \{\phi\}_2$  は、2 次モードのそれぞれである。 $[M^*] = [\Phi]^T [M] [\Phi]$  と  $[K^*] = [\Phi]^T [K] [\Phi]$  を、それぞれ **一般化質量マトリックスと一般化剛性マトリックス** という。

$n$  自由度系では、 $i$  次のモード振動系の運動方程式は

$$m_i^* \ddot{u}_i + k_i^* u_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (10.23)$$

と表わせるから、**一般化質量**  $m_i^*$  は

$$m_i^* = \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i \quad (10.24)$$

である。また、**一般化剛性**  $k_i^*$  は、式(10.13)より

$$k_i^* = \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_i = \omega_i^2 \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = \omega_i^2 m_i^* \quad (10.25)$$

である。一般化質量マトリックスと一般化剛性マトリックスは

$$\begin{aligned} [M^*] &= [\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} m_1^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n^* \end{bmatrix} \\ [K^*] &= [\Phi]^T [K] [\Phi] = \begin{bmatrix} k_1^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.26)$$

である。

ランプド・マスの条件で  $i$  次モードの一般化質量と一般化剛性は

$$m_i^* = \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = \{\phi_{1i} \quad \phi_{2i} \quad \dots \quad \phi_{ni}\} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{Bmatrix}$$

$$= \{m_1 \phi_{1i} \quad m_2 \phi_{2i} \quad \dots \quad m_n \phi_{ni}\} \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n m_k \phi_{ki}^2 \quad (10.27)$$

$$k_i^* = \omega_i^2 m_i^* = \omega_i^2 \sum_{k=1}^n m_k \phi_{ki}^2 \quad (10.28)$$

である。

以上のように、“連成しない方程式に変換する仕組み”は、数学的に見た場合、元の方程式を変数変換し、左から“モードマトリックスの転置”を乗じることである。この詳しい説明は、第 19 章で行う。

正規化されていないモードベクトル  $\{a\}_i$  から、正規化したモードベクトル  $\{\phi\}_i$  を求めよう。それらの関係を

$$\{\phi\}_i = \mu \{a\}_i \quad (10.29)$$

とする。  $\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = 1$  とおき、式(10.29)を代入すると

$$1 = \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = \mu \{a\}_i^T [M] \mu \{a\}_i = \mu^2 \{a\}_i^T [M] \{a\}_i \quad (10.30)$$

となる。したがって、正規化するための係数  $\mu$  は以下のとおりである。

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\{a\}_i^T [M] \{a\}_i}} \quad (10.31)$$

### 例題 10.b モードベクトルの正規化

例題 10a で求めたモードベクトルを正規化しよう。

正規化されていない 1 次モードベクトルの成分は、例題 10.a の式(c)から

$$a_{11} = 0.6286, \quad a_{21} = 1$$

であり、正規化するための係数は、式(10.31)・(10.27)より



$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2}} = \frac{1}{\sqrt{20000 \times 0.6286^2 + 10000 \times 1^2}} = 0.007474 \text{kg}^{-1/2}$$

である。正規化されたモードベクトルの成分  $\phi_{11}, \phi_{21}$  は、式(10.29)から

$$\phi_{11} = \mu_1 a_{11} = 0.007474 \times 0.6286 = 0.004698 \text{kg}^{-1/2}$$

$$\phi_{21} = \mu_1 a_{21} = 0.007474 \times 1 = 0.007474 \text{kg}^{-1/2}$$

となる。正規化されていない 2 次モードベクトルの成分は、例題 10.a の式(d)から

$$a_{12} = -0.7954, \quad a_{22} = 1$$

であり、正規化するための係数は

$$\mu_2 = \frac{1}{\sqrt{m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2}} = \frac{1}{\sqrt{20000 \times (-0.7954)^2 + 10000 \times 1^2}} = 0.006644 \text{kg}^{-1/2}$$

である。正規化されたモードベクトルの成分  $\phi_{12}, \phi_{22}$  は

$$\phi_{12} = \mu_2 a_{12} = 0.006644 \times (-0.7954) = -0.005285 \text{kg}^{-1/2}$$

$$\phi_{22} = \mu_2 a_{22} = 0.006644 \times 1 = 0.006644 \text{kg}^{-1/2}$$

である。したがって、正規化されたモードマトリックスは

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.004698 & -0.005285 \\ 0.007474 & 0.006644 \end{bmatrix} \text{kg}^{-1/2} \quad (\text{a})$$

である。

正規化した運動方程式は、 $m^* = 1$  を式(10.23)・(10.25)に代入すると

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i = 0 \quad (\text{b})$$

が求まる。この一般解は

$$u_i = C_{1i} \cos \omega_i t + C_{2i} \sin \omega_i t \quad (\text{c})$$

である。 $C_{1i}, C_{2i}$  は初期条件から定まる定数である。例題 10.a の式(b)の固有振動数を代入すると

$$\begin{cases} u_1 = C_{11} \cos 33.38t + C_{21} \sin 33.38t \\ u_2 = C_{12} \cos 73.39t + C_{22} \sin 73.39t \end{cases} \quad (\text{d})$$

となる。

ここで、“元の変位の初期条件”から“基準座標の初期条件”を求めるために便利な**展開定理**(expansion theorem)を説明しておこう。元の変位  $\{x\}$  と基準座

標  $\{u\}$  の関係は、式(10.3)から

$$\{x\} = [\Phi]\{u\} = \{\phi\}_1 u_1 + \{\phi\}_2 u_2 + \cdots + \{\phi\}_n u_n \quad (10.32)$$

である。両辺に  $\{\phi\}_i^T [M]$  を左から乗じると、“モードベクトルの直交性”から、 $\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i$  以外は 0 となるので

$$u_i = \frac{\{\phi\}_i^T [M] \{x\}}{\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i} \quad (10.33)$$

である。これが展開定理である。式(10.33)は、初期状態を含んで任意の振動状態で成り立つ。したがって、元の変位  $\{x\}$  に対する基準座標  $\{u\}$  は、この式によって求めることができる。また、展開定理は、速度と加速度についても成り立つ。

式(10.33)は、ランプト・マスで正規化すると、 $\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = 1$  より

$$\begin{aligned} u_i &= \{\phi\}_i^T [M] \{x\} \\ &= \{\phi_{i1} \quad \phi_{i2} \quad \cdots \quad \phi_{in}\} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n m_k \phi_{ki} x_k \end{aligned} \quad (10.34)$$

である。

### 例題 10.c 基準座標の初期条件，基準振動の解と元の変位の解

“図 10.1 の問題”で非減衰自由振動の場合について、基準座標の初期条件を展開定理で求め、基準振動と元の変位の解を求めよう。 $t=0$  の元の変位と速度を  $x_1 = x_2 = 0.1m$ ， $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$  にする。

基準座標  $\{u\}$  の初期条件は、式(10.34)に数値を代入すると

$$\begin{cases} u_1 = 20000 \times 0.004698 \times 0.1 + 10000 \times 0.007474 \times 0.1 \\ u_2 = 20000 \times (-0.005285) \times 0.1 + 10000 \times 0.006644 \times 0.1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} u_1 = 16.87 \text{ m} \cdot \text{kg}^{1/2} \\ u_2 = -3.926 \text{ m} \cdot \text{kg}^{1/2} \end{cases} \quad (\text{a})$$

となる。速度  $\{\dot{u}\}$  の初期条件は、式(10.34)を微分し、数値を代入すると

$$\dot{u}_1 = 0, \quad \dot{u}_2 = 0 \quad (\text{b})$$

となる。

基準座標の初期条件が定まったので、これに対するモード振動系(基準座標)の特解を求めよう。例題 10.b に示す一般解・式(d)を 1 回微分すると

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -33.38C_{11} \sin 33.38t + 33.38C_{21} \cos 33.38t \\ \dot{u}_2 = -73.39C_{12} \sin 73.39t + 73.39C_{22} \cos 73.39t \end{cases} \quad (c)$$

となる。この式に  $t=0$  と式(b)を代入すると、 $C_{21} = C_{22} = 0$  となる。例題 10.b の式(d)は

$$u_1 = C_{11} \cos 33.38t, \quad u_2 = C_{21} \cos 73.39t \quad (d)$$

となる。この式に  $t=0$  と式(a)を代入すると、 $C_{11} = 16.87\text{m} \cdot \text{kg}^{1/2}$ 、 $C_{12} = -3.926\text{m} \cdot \text{kg}^{1/2}$  が求まる。したがって、基準座標の初期条件に対する特解は次式となる。

$$u_1 = 16.87 \cos 33.38t, \quad u_2 = -3.926 \cos 73.39t \quad (e)$$

この式を例題 10.a の変数変換式(f)に代入すると、最終目的である、初期条件に対する元の変位  $\{x\}$  の特解

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.004698 & -0.005285 \\ 0.007474 & 0.006644 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 16.87 \cos 33.38t \\ -3.926 \cos 73.39t \end{Bmatrix} \quad (f)$$

を得る。

## 10.2 調和地盤動に対する非減衰応答

図 10.1 において、地盤加速度  $\ddot{x}_g$  が、振幅 1 の調和振動

$$\ddot{x}_g = \sin pt \quad (10.35)$$

である場合の非減衰応答を解析しよう。その運動方程式は、式(9.27)に  $[C]=[0]$  と式(10.35)を代入した次式である。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = -[M]\{1\} \sin pt \quad (10.36)$$

この式に変数変換式(10.3)を代入し、さらに左からモードマトリックスの転置を乗ずると

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{u}\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{u\} = -[\Phi]^T [M]\{1\} \sin pt \quad (10.37)$$

となり、“モードベクトルの直交性” から、連成しない方程式

$$\{\phi\}_i^T [M]\{\phi\}_i \ddot{u}_i + \omega_i^2 \{\phi\}_i^T [M]\{\phi\}_i u_i = -\{\phi\}_i^T [M]\{1\} \sin pt \quad (10.38)$$

となる。両辺を一般化質量  $\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i$  でわると

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i = -\beta_i \sin pt \quad (10.39)$$

となる。ここで、 $\beta_i$  は**刺激係数**で

$$\beta_i = \frac{\{\phi\}_i^T [M] \{1\}}{\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i} \quad (10.40)$$

である。正規化した刺激係数は、 $\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = 1$  より

$$\beta_i = \{\phi\}_i^T [M] \{1\} \quad (10.41)$$

である。正規化したランプト・マスの刺激係数は、

$$\beta_i = \{\phi\}_i^T [M] \{1\} = \{\phi_{1i} \quad \phi_{2i} \quad \cdots \quad \phi_{ni}\} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n m_k \phi_{ki} \quad (10.42)$$

である。

式(10.39)の一般解は、式(3.6)で  $F_0/m$  を  $(-\beta_i)$  に置き換えたものであるから

$$u_i = C_{1i} \cos \omega_i t + C_{2i} \sin \omega_i t - \frac{\beta_i}{\omega_i^2 - p^2} \sin pt \quad (10.43)$$

である。初期条件を  $\{x\} = \{\dot{x}\} = \{0\}$  とすると、それに対する基準座標の初期条件は、展開定理から  $\{u\} = \{\dot{u}\} = \{0\}$  である。式(10.43)に  $t=0$  と  $\{u\} = \{0\}$  を代入すると、 $C_{1i} = 0$  となる。したがって、式(10.43)は

$$u_i = C_{2i} \sin \omega_i t - \frac{\beta_i}{\omega_i^2 - p^2} \sin pt \quad (10.44)$$

となる。1回微分すると

$$\dot{u}_i = \omega_i C_{2i} \cos \omega_i t - \frac{\beta_i p}{\omega_i^2 - p^2} \cos pt \quad (10.45)$$

この式に  $t=0$  と  $\{\dot{u}\} = \{0\}$  を代入すると

$$C_{2i} = \frac{p}{\omega_i (\omega_i^2 - p^2)} \beta_i$$

したがって、式(10.44)は次式となる。

$$u_i = \frac{\beta_i}{\omega_i^2 - p^2} \left( \frac{p}{\omega_i} \sin \omega_i t - \sin pt \right) \quad (10.46)$$

### 例題 10.d 基準座標と元の変位の解

“図 10.1 の問題” で地盤加速度  $\ddot{x}_g$  が、振幅 1 および円振動数  $p = 10\text{rad/s}$  で調和振動する場合の基準座標と元の変位の解を求めよう。

正規化したランプト・マスの刺激係数は、式(10.42)から

$$\begin{cases} \beta_1 = \sum_{k=1}^2 m_k \phi_{k1} = 20000 \times 0.004698 + 10000 \times 0.007474 = 168.7\text{kg}^{1/2} \\ \beta_2 = \sum_{k=1}^2 m_k \phi_{k2} = 20000 \times (-0.005285) + 10000 \times 0.006644 = -39.26\text{kg}^{1/2} \end{cases} \quad (\text{a})$$

である。基準座標  $\{u\}$  の解は、式(10.46)に数値を代入し

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{168.7}{33.38^2 - 10^2} \left( \frac{10}{33.38} \sin 33.38t - \sin 10t \right) \\ &= 0.1663(0.2996 \sin 33.38t - \sin 10t) \end{aligned} \quad (\text{b})$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{-39.26}{73.39^2 - 10^2} \left( \frac{10}{73.39} \sin 73.39t - \sin 10t \right) \\ &= -0.007427(0.1363 \sin 73.39t - \sin 10t) \end{aligned} \quad (\text{c})$$

である。これらの式を変数変換式(10.32)に代入すると、以下に示すように、最終目的である元の変位  $\{x\}$  の解が求まる。

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.004698 & -0.005285 \\ 0.007474 & 0.006644 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.1663(0.2966 \sin 33.38t - \sin 10t) \\ -0.007427(0.1363 \sin 73.39t - \sin 10t) \end{Bmatrix} \quad (\text{d})$$

## 10.3 要約

モード解析とは、“①連成している運動方程式を、元の変位から基準座標に変数変換し、左からモードマトリックスの転置を乗じることによって、基準座標を変数とする連成しない微分方程式群に変える、②それらを解く、③それらの解を逆に変数変換によって元の変位の解を求める” 解法である。

## 第 11 章 多自由度系における減衰力の取り扱い方

この章では、“多自由度系の減衰”に対する解析上の問題点を明確にする。橋梁などの減衰効果が複雑な系では、解析に用いる減衰力を定めるために、強引な仮定を導入せざるを得ない。そのために、解析上で減衰力を過大に評価する場合がある。それを解決するための工夫もこの章で示す。

### 11.1 比例減衰

1 自由度系に対する“ニュートンの運動方程式”として、一般に

$$m\ddot{x} = \underbrace{f(t)}_{\text{外力}} + \underbrace{(-c\dot{x})}_{\text{減衰力}} + \underbrace{(-kx)}_{\text{復元力}} \quad (11.1)$$

が用いられる。変位  $x$  に対する精度の高い解を得るためには、右辺で“与えられる外力  $f(t)$  以外”の項が実際の力をできるだけ再現している必要がある。実験で求めた剛性  $k$  を用いた  $(-kx)$  は、精度の良い“復元力の近似”である。また、同様の減衰係数  $c$  を用いた  $(-c\dot{x})$  は、比較的精度の良い“減衰力の近似”である。したがって、1 自由度系の振動状態に対して、式(11.1)から比較的精度の良い解を求めることができる。

多自由度系に対する“ニュートンの運動方程式”として、一般に

$$[M]\{\ddot{x}\} = \underbrace{\{f(t)\}}_{\text{外力}} + \underbrace{(-[C]\{\dot{x}\})}_{\text{減衰力}} + \underbrace{(-[K]\{x\})}_{\text{復元力}} \quad (11.2)$$

が用いられる。各要素  $s$  の剛性  $k_s$  を個々に実験によって定め、9.2 節で述べた方法で系の剛性マトリックス  $[K]$  を求めれば、 $[K]\{x\}$  は、比較的精度の良い“復元力の近似”となる。しかし、各要素  $s$  の減衰係数  $c_s$  を個々に実験によって定め、9.3 節で述べた方法で系の減衰マトリックスで求めても、 $[C]\{\dot{x}\}$  は実際の減衰力と合致しない。なぜならば、要素によって組み立てられた多自由度系の減衰(**構造減衰**(structural damping))は、各要素から算定した減衰よりはるかに大きい値を示す場合が多いからである。これは要素の接合部のすべり摩擦などがあるためである。したがって、多自由度系の減衰は、系全体としてマクロ的にとらえざるを得ない。

そこで次のような仮定を導入する。“力のつり合い”において、減衰力は他

の力に比べて通常小さいので、減衰振動も非減衰振動と同じ基準振動で構成されると仮定する。言い換えれば、減衰力に対しても“モードベクトルの直交性”が成立すると仮定する。この仮定を**比例減衰**(proportional damping)という。

式(11.2)に変数変換式(10.3)を代入し、左からモードマトリックスの転置を乗じると

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{u}\} + [\Phi]^T [C][\Phi]\{\dot{u}\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{u\} = \{0\} \quad (11.3)$$

となる。比例減衰の仮定に基づいて、“モードベクトルの直交性”から、以下のように連成しない方程式となる。

$$m_i^* \ddot{u}_i + c_i^* \dot{u}_i + k_i^* u_i = f_i^*(t) \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (11.4)$$

$$c_i^* = \{\phi\}_i^T [C] \{\phi\}_i \quad (11.5)$$

あるいは

$$\ddot{u}_i + 2h_i^* \omega_i \dot{u}_i + \omega_i^2 u_i = \frac{f_i^*(t)}{m_i^*} \quad (11.6)$$

$$h_i^* = c_i^* / 2\sqrt{k_i^* m_i^*} \quad \text{すなわち} \quad c_i^* = 2m_i^* h_i^* \omega_i \quad (11.7)$$

となる。 $c_i^*$ と $h_i^*$ は、それぞれ*i*次モードの**一般化減衰係数**と**一般化減衰定数**という。また、**一般化減衰マトリックス** $[C^*]$ は、以下のとおりである。

$$[C^*] = [\Phi]^T [C] [\Phi] = \begin{bmatrix} c_1^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n^* \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

比例減衰の仮定に基づいて、実験の対数減衰率から多自由度系の一般化減衰定数を求めることができる。すなわち、“あるモードの固有振動数と同じ振動数の調和外力”によって強制振動させたときの定常振動は、理論上、そのモードの基準振動だけで他のモードの基準振動は含まれない。したがって、そのモードの一般化減衰定数は、その強制振動が定常振動に移行したことを確認した上で外力を開放した自由振動の対数減衰率から求められる。しかし、実験で測定可能な一般化減衰定数は、実験の精度上から1次モードからせいぜい3次モー

ドまでである。したがって、それ以上のモード次数の一般化減衰定数を定めるために、さらに仮定を設けなければならない。

このようにして、まず、すべてのモードの一般化減衰定数  $h_i^*$  を定める。モード解析の場合は、それで解析可能であるが、非線形解析などの数値解析の場合は、減衰マトリックス  $[C]$  が必要であるので、 $[C]$  は  $h_i^*$  から逆算する。

## 11.2 一般化減衰定数の定め方

一般化減衰定数を定めることに対して、構造物(系)は 2 つの種類に分類できる。すなわち、①建物のように、構造形式が比較的単純な場合は、全体の振動に影響を及ぼす基準振動の数が少ないので、実験によって裏打ちされた主要なモードの一般化減衰定数を定めることができる、②橋梁のように、上部構造、支承、下部構造および基礎構造などの複数の構造体で構成された複雑な系では、実験に裏打ちされた一般化減衰定数を定めることが困難である。

それぞれの構造種類に対する“一般化減衰定数の定め方”を説明する。すなわち、それぞれ**レーリー減衰**(Rayleigh damping)および**ひずみエネルギー比例減衰**(この比例は、ひずみエネルギーに対して比例することを意味し、比例減衰のそれとは意味が異なる)である。

### (1) レーリー減衰

レーリー減衰は、主要な 2 つモードの一般化減衰定数が実験的にわかっている場合に、他のモードの一般化減衰係数を定める方法である。これらの 2 つのモードの基準振動が、元の振動のほとんどを占める場合(地震に対しては等価質量比の大きさによって判断できる)、他のモードの一般化減衰定数を適当に定めても、その影響は小さいので、十分な精度の動的解析を行うことができるわけである。

レーリー減衰では、減衰マトリックス  $[C]$  が、下式のように、質量マトリックス  $[M]$  と剛性マトリックス  $[K]$  の 1 次結合で表わせると仮定する。 $[M]$  と  $[K]$  を用いるのは、ともに“モードベクトルの直交性”が成り立つので、都合がよいからである。

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K] \quad (11.9)$$



式(11.9)に左から  $i$  次のモードベクトルの転置  $\{\phi\}_i^T$ , 右から  $\{\phi\}_i$  を乗じると

$$\{\phi\}_i^T [C] \{\phi\}_i = a_0 \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i + a_1 \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_i$$

となる。この式に(11.7)・(10.24)・(10.25)を代入すると

$$\begin{aligned} 2m_i^* h_i^* \omega_i &= a_0 m_i^* + a_1 \omega_i^2 m_i^* = (a_0 + a_1 \omega_i^2) m_i^* \\ \therefore 2h_i^* \omega_i &= a_0 + a_1 \omega_i^2 \end{aligned} \quad (11.10)$$

となる。すなわち、式(11.9)が成り立つと仮定すると、 $i$  次モードの固有振動数  $\omega_i$  と一般化減衰定数  $h_i^*$  は、式(11.10)の関係がある。

主要なモードを 1 次と 2 次とすると、それぞれの固有振動数と一般化減衰定数を式(11.10)に代入すると、係数  $a_0$  と  $a_1$  は

$$\begin{aligned} 2h_1^* \omega_1 &= a_0 + a_1 \omega_1^2, \quad 2h_2^* \omega_2 = a_0 + a_1 \omega_2^2 \\ \therefore a_0 &= \frac{2\omega_1 \omega_2 (h_2^* \omega_1 - h_1^* \omega_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \quad a_1 = \frac{2(h_1^* \omega_1 - h_2^* \omega_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \end{aligned} \quad (11.11)$$

となる。係数  $a_0$  と  $a_1$  が定まったので、 $i$  次モードの一般化減衰定数は、式(11.10)より

$$h_i^* = \frac{a_0}{2\omega_i} + \frac{a_1 \omega_i}{2} \quad (11.12)$$

である。

### 例題 11.a レーリー減衰

自由度が 198 である系について、固有値解析を行ったところ、1 次、2 次と最高次(198 次)のモードの固有円振動数が、それぞれ

$$\omega_1 = 3.3, \omega_2 = 7.4, \dots, \omega_{198} = 80705 \quad (\text{単位: rad/s}) \quad (a)$$

であった。また、実験の結果、1 次と 2 次モードの一般化減衰定数が

$$h_1^* = 0.05, h_2^* = 0.025 \quad (b)$$

であることがわかっている。この場合のレーリー減衰を求め、固有円振動数と一般化減衰定数の関係を図示し、最高次の一般化減衰定数を調べよう。

レーリー減衰の係数は、式(11.11)に 1 次と 2 次モードの固有円振動数と一般

化減衰定数の値を代入すると

$$a_0 = \frac{2 \times 3.3 \times 7.4 (0.025 \times 3.3 - 0.05 \times 7.4)}{3.3^2 - 7.4^2} = 0.3201 \tag{c}$$

$$a_1 = \frac{2 (0.05 \times 3.3 - 0.025 \times 7.4)}{3.3^2 - 7.4^2} = 0.0009118 \tag{d}$$

となる。これらを式(11.12)に代入すると、一般化減衰定数

$$h_i^* = \frac{0.3201}{2\omega_i} + \frac{0.0009118\omega_i}{2} = \frac{0.1601}{\omega_i} + 0.0004559\omega_i \tag{e}$$

が求まる。

このレーリー減衰の一般化減衰定数と固有円振動数の関係を図示したのが図 11.a である。各モードの固有円振動数はとびとびの値であるから、一般化減衰定数も図の曲線においてとびとびの値を取る。当然、1次と2次モードの一般化減衰定数は、 $h_1^* = 0.05, h_2^* = 0.025$  である。また、最高次の198次モードの一般化減衰定数は以下のとおりである。

$$h_{198}^* = \frac{0.1602}{80705} + 0.0004559 \times 80705 = 36.79 \tag{f}$$

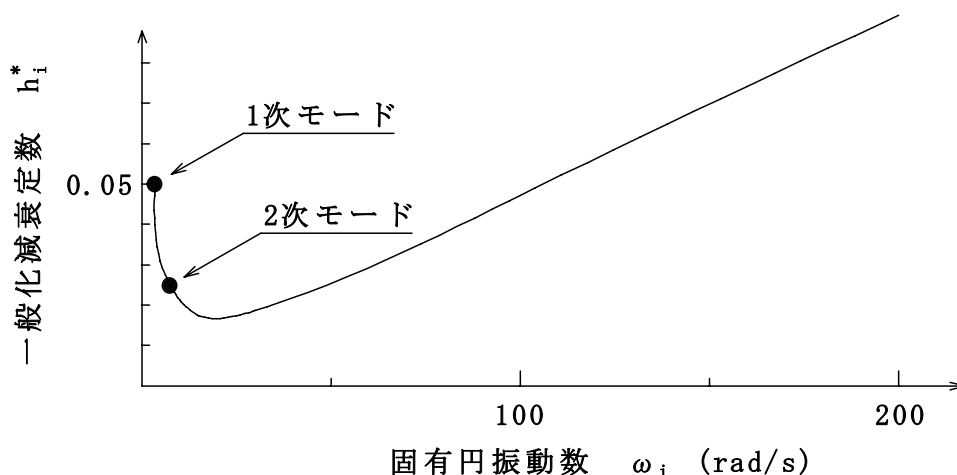


図 11. a 一般化減衰定数と固有円振動数の関係

レーリー減衰によって定められる一般化減衰定数の特徴は、図 11.a に示すように、振動数  $\omega_i$  大きくなると、式(11.12)の右辺の左項は 0 に近づくが、右項は直線的に増加する。多自由度の系の場合、一般に係数  $a_0$  および  $a_1$  は低次の一般

化減衰定数によって定められるので、高次の一般化減衰定数は、かなり大きく設定されることになる。したがって、地震応答解析の場合、通常の建物のように、高次の刺激係数がほとんど0の場合は問題がないが、高次のモードの刺激係数がある程度の大きさをもっている系の場合は、そのモードの減衰力が計算結果に過大な影響を及ぼす可能性があるので注意しなければならない。

(2) ひずみエネルギー比例減衰

複雑な系の場合、実験的で裏打ちされた一般化減衰定数を定めることができないので、“ひずみエネルギー比例減衰”とよばれる少々強引な仮定を導入する。この仮定は、①個々の要素の“構造減衰を加味した減衰定数(以降、要素の減衰定数)”は、要素の種類と材料によって定まる、②あるモードの一般化減衰定数の算定において、個々の要素の減衰定数を、その基準振動における要素のひずみエネルギーの大きさに比例して考慮する、である。具体的には、一般化減衰定数は、各要素の減衰定数とひずみエネルギーを乗じたものの合計を系全体のひずみエネルギーで除した値である。以下に、“ひずみエネルギー比例減衰”による一般化減衰定数の求め方を示す。

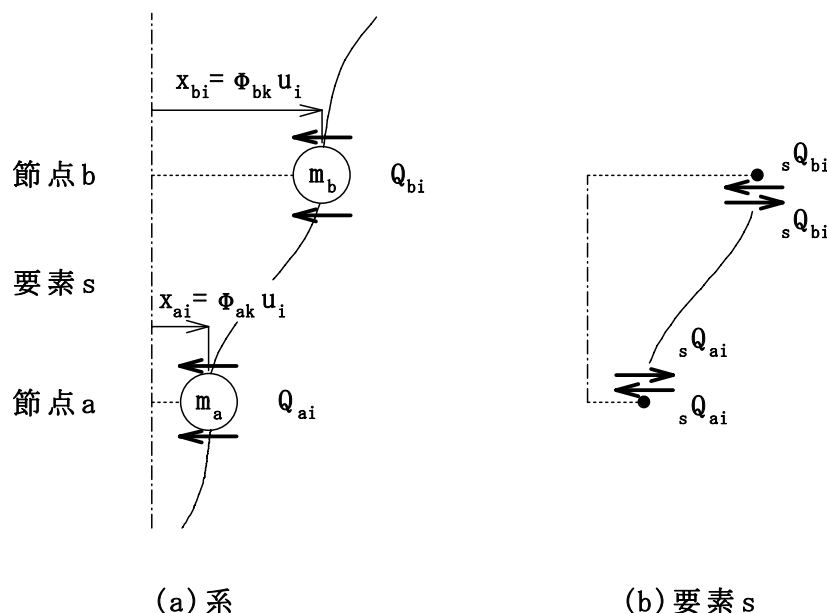


図 11.1 i次基準振動

図 11.1(a)に示すように、 $i$ 次基準振動における要素  $s$  の変位は

$$\begin{aligned} a_{\text{端}} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_{ai} \\ x_{bi} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \phi_{ai} \\ \phi_{bi} \end{Bmatrix} u_i = {}_s \{\phi\}_i \cdot u_i \end{aligned} \quad (11.13)$$

と表わせる。ここで、 $u_i$  は  $i$ 次基準座標、 ${}_s \{\phi\}_i$  は要素  $s$  の  $i$ 次モードベクトル、 $\phi_{ai}$  と  $\phi_{bi}$  はその成分である。

このときの要素のひずみエネルギー(位置エネルギー)  ${}_s V_i$  は、図 11.1(b)に示すように、要素の復元力の仕事に等しいから

$$\begin{aligned} {}_s V_i &= \frac{1}{2} \{ {}_s Q_{ai} \cdot x_{ai} + {}_s Q_{bi} \cdot x_{bi} \} = \frac{1}{2} \{ {}_s Q_{ai} (\phi_{ai} \cdot u_i) + {}_s Q_{bi} (\phi_{bi} \cdot u_i) \} \\ \therefore {}_s V_i &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} {}_s Q_{ai} \\ {}_s Q_{bi} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \phi_{ai} \\ \phi_{bi} \end{Bmatrix} u_i \end{aligned} \quad (11.14)$$

である。ここで、 ${}_s Q_{ai}$  と  ${}_s Q_{bi}$  は、 $a$  端と  $b$  端における要素  $s$  の復元力である。それらは、式(9.8)より

$$\begin{Bmatrix} {}_s Q_{ai} \\ {}_s Q_{bi} \end{Bmatrix} = {}_s [K] \begin{Bmatrix} x_{ai} \\ x_{bi} \end{Bmatrix} = {}_s [K] \begin{Bmatrix} \phi_{ai} \cdot u_i \\ \phi_{bi} \cdot u_i \end{Bmatrix} = {}_s [K] \begin{Bmatrix} \phi_{ai} \\ \phi_{bi} \end{Bmatrix} u_i \quad (11.15)$$

である。ここで、 ${}_s [K]$  は要素  $s$  の剛性マトリックスである。式(11.15)の転置は、 ${}_s [K]$  が対称行列であることを考慮すると

$$\begin{Bmatrix} {}_s Q_{ai} \\ {}_s Q_{bi} \end{Bmatrix}^T = \left( {}_s [K] \cdot \begin{Bmatrix} \phi_{ai} \\ \phi_{bi} \end{Bmatrix} u_i \right)^T = \begin{Bmatrix} \phi_{ai} \\ \phi_{bi} \end{Bmatrix}^T {}_s [K] \cdot u_i$$

となる。これを(11.14)に代入すると次式となる。

$${}_s V_i = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \phi_{ai} \\ \phi_{bi} \end{Bmatrix}^T {}_s [K] \cdot u_i \cdot \begin{Bmatrix} \phi_{ai} \\ \phi_{bi} \end{Bmatrix} \cdot u_i = \frac{1}{2} {}_s \{\phi\}_i^T \cdot {}_s [K] \cdot {}_s \{\phi\}_i \cdot u_i^2 \quad (11.16)$$

$i$ 次基準振動  $\{x\}_i$  と基準座標  $u_i$  関係は、式(10.32)より

$$\{x\}_i = \{\phi\}_i \cdot u_i \quad (11.17)$$

である。そのとき、系全体の  $i$ 次基準振動のひずみエネルギー  $V_i$  は、復元力によってなされる仕事に等しいから、

$$V_i = \frac{1}{2} \{Q\}_i^T \cdot \{x\}_i \quad (11.18)$$

である。この式に  $\{Q\}_i = [K]\{x\}_i$  を代入すると

$$V_i = \frac{1}{2} \cdot ([K]\{x\}_i)^T \cdot \{x\}_i = \frac{1}{2} \cdot \{x\}_i^T \cdot [K] \cdot \{x\}_i \quad (11.19)$$

となる。これに式(11.17)を代入すると

$$V_i = \frac{1}{2} \cdot \{\phi\}_i^T \cdot [K] \cdot \{\phi\}_i \cdot u_i^2 \quad (11.20)$$

となる。

$i$ 次モードの一般化減衰定数  $h_i^*$  は、要素  $s$  の減衰定数を  ${}_s h$  とすると、ひずみエネルギー比例減衰の仮定から、式(11.16)・(11.20)より

$$h_i^* = \frac{\sum_{s=1}^n {}_s h \cdot {}_s V_i}{V_i} = \frac{\sum_{s=1}^n {}_s h \cdot \{\phi\}_i^T \cdot {}_s [K] \cdot \{\phi\}_i}{\{\phi\}_i^T \cdot [K] \cdot \{\phi\}_i} \quad (11.21)$$

となる。

### 例題 11.b ひずみエネルギー比例減衰による一般化減衰定数

“図 10.1 の問題”の 2 自由度のせん断建物モデルについて、ひずみエネルギー比例減衰によって一般化減衰定数を求めてみよう。要素 1 と要素 2 の減衰定数を  ${}_1 h = 0.05$  と  ${}_2 h = 0.025$  とする。

系の正規化した 1 次モードの一般化剛性  $k_1^* = \{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_1$  は、式(10.25)から

$$k_1^* = \{\phi\}_1^T \cdot [K] \cdot \{\phi\}_1 = \omega_1^2 m_1^* = \omega_1^2 = 33.38^2 = 1114 \text{s}^{-2}$$

である。要素 1 の一般化剛性は、1 次の行列と考えてよいから

$${}_1 \{\phi\}_1^T \cdot {}_1 [K] \cdot {}_1 \{\phi\}_1 = \phi_{11} k_{11} \phi_{11} = 0.004698 \times 4.0 \times 10^7 \times 0.004698 = 882.8 \text{s}^{-2}$$

である。要素 2 の一般化剛性は、系の一般化剛性から要素 1 のそれを引けばよいから

$$\begin{aligned} {}_2 \{\phi\}_1^T \cdot {}_2 [K] \cdot {}_2 \{\phi\}_1 &= \{\phi\}_1^T \cdot [K] \cdot \{\phi\}_1 - {}_1 \{\phi\}_1^T \cdot {}_1 [K] \cdot {}_1 \{\phi\}_1 \\ &= 1114 - 882.8 = 231.2 \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

となる。ゆえに、1 次モードの一般化減衰定数は、式(11.21)から下式である。

$$h_1^* = \frac{\sum_{s=1}^2 {}_s h \cdot \{\phi\}_1^T \cdot {}_s [K] \cdot \{\phi\}_1}{\{\phi\}_1^T \cdot [K] \cdot \{\phi\}_1} = \frac{0.05 \times 882.8 + 0.025 \times 231.2}{1114} = 0.04481$$

同様に、系の正規化した 2 次モードの一般化剛性  $k_2^* = \{\phi\}_2^T [K] \{\phi\}_2$  は

$$k_2^* = \{\phi\}_2^T \cdot [K] \cdot \{\phi\}_2 = \omega_2^2 m_2^* = \omega_2^2 = 73.39^2 = 5386 \text{ s}^{-2}$$

である。要素 1 の一般化剛性は

$${}_1\{\phi\}_2^T \cdot {}_1[K] \cdot {}_1\{\phi\}_2 = \phi_{12} k_1 \phi_{12} = (-0.005285) \times 4.0 \times 10^7 \times (-0.005285) = 1117 \text{ s}^{-2}$$

である。要素 2 の一般化剛性は

$$\begin{aligned} {}_2\{\phi\}_2^T \cdot {}_2[K] \cdot {}_2\{\phi\}_2 &= \{\phi\}_2^T \cdot [K] \cdot \{\phi\}_2 - {}_1\{\phi\}_2^T \cdot {}_1[K] \cdot {}_1\{\phi\}_2 \\ &= 5386 - 1117 = 4269 \text{ s}^{-2} \end{aligned}$$

となる。ゆえに、1 次モードの一般化減衰定数は、式(11.21)から下式である。

$$h_2^* = \frac{\sum_{s=1}^2 h_s \cdot \{\phi\}_2^T \cdot {}_s[K] \cdot \{\phi\}_2}{\{\phi\}_2^T \cdot [K] \cdot \{\phi\}_2} = \frac{0.05 \times 1117 + 0.025 \times 4269}{5386} = 0.03018$$

モード図(図 10.a)からわかるように、1 次モードの変形は要素 2 より要素 1 の方が大きいので、一般化減衰定数は要素 1 の減衰定数に近いわけである。2 次モードは逆である。

### 11.3 減衰係数の求め方

数値解析の場合、元の運動方程式を直積解くので、減衰マトリックス  $[C]$  が必要である。それを一般化減衰定数から求める方法を述べる。

#### (1) 単純な系に対するレーリー減衰の適用

レーリー減衰を適用する場合、減衰マトリックス  $[C]$  は式(11.9)である。係数  $a_0, a_1$  は、主要な 2 つのモードの固有振動数と一般化減衰定数を式(11.11)に代入することによって求まる。

#### (2) 複雑な系に対する“ひずみエネルギー比例減衰”の適用

複雑な系に対して、すべてのモードの一般化減衰定数を“ひずみエネルギー比例減衰”によって計算し、それから減衰マトリックスを求める方法がある。

式(11.8)に、左からモードマトリックスの転置の逆行列  $[\Phi]^{-T}$ 、右から逆行列  $[\Phi]^{-1}$  を乗じると

$$[\Phi]^{-T} [C^*] [\Phi]^{-1} = [\Phi]^{-T} [\Phi]^T [C] [\Phi] [\Phi]^{-1} = [C] \quad (11.22)$$

となり減衰マトリックスが求まる。しかし、この方法は、自由度が大きくなる  
と膨大な計算時間を要する。そこで、次のような工夫をする。

一般化質量マトリックスは、式(10.26)に示したように

$$[M^*] = [\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} m_1^* & 0 & \cdots \\ 0 & m_2^* & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (11.23)$$

である。左から逆行列 $[M^*]^{-1}$ を乗じると、左辺は単位行列 $[I]$

$$\begin{aligned} [M^*]^{-1} [M^*] &= [M^*]^{-1} [\Phi]^T [M] [\Phi] \\ \therefore [I] &= [M^*]^{-1} [\Phi]^T [M] [\Phi] \end{aligned} \quad (11.24)$$

となる。また、同様に

$$[I] = [\Phi]^{-1} [\Phi] \quad (11.25)$$

である。したがって

$$[\Phi]^{-1} [\Phi] = [M^*]^{-1} [\Phi]^T [M] [\Phi]$$

となる。右から $[\Phi]^{-1}$ を乗じると

$$[\Phi]^{-1} = [M^*]^{-1} [\Phi]^T [M] \quad (11.26)$$

となる。 $([A]^T)^T = [A]$ ,  $([A][B])^T = [B]^T [A]^T$  および対角行列 $[M^*], [M^*]^{-1}$ を転置しても変わらないことを考えて、式(11.26)の全体を転置すると下式となる。

$$\begin{aligned} [\Phi]^{-T} &= \left( [M^*]^{-1} [\Phi]^T [M] \right)^T \\ &= \left( [\Phi]^T [M] \right)^T [M^*]^{-T} = \left( [\Phi]^T [M] \right)^T [M^*]^{-1} \\ &= [M]^T \left( [\Phi]^T \right)^T [M^*]^{-1} = [M] [\Phi] [M^*]^{-1} \end{aligned} \quad (11.27)$$

式(11.26)・(11.27)を(11.22)の左辺に代入すると

$$[C] = [M] [\Phi] [M^*]^{-1} [C^*] [M^*]^{-1} [\Phi]^T [M] \quad (11.28)$$

となる。

$[M^*]$ は対角行列であるので、その逆行列は

$$[M^*]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1^*} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{m_2^*} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

である(式(8.21)参照)。したがって

$$[M^*]^{-1}[C^*][M^*]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1^*} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{m_2^*} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2h_1^* \omega_1 m_1^* & 0 & \dots \\ 0 & 2h_2^* \omega_2 m_2^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1^*} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{m_2^*} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2h_1^* \omega_1}{m_1^*} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{2h_2^* \omega_2}{m_2^*} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (11.29)$$

である。式(11.28)の右辺の一部 $[\Phi][M^*]^{-1}[C^*][M^*]^{-1}[\Phi]^T$ に式(11.29)を代入し、行列はベクトルの集まりであることを考慮すると

$$[\Phi]([M^*]^{-1}[C^*][M^*]^{-1})[\Phi]^T$$

$$= [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2 \quad \dots] \left[ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \frac{2h_1^* \omega_1}{m_1^*} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{2h_2^* \omega_2}{m_2^*} \\ 0 \\ \vdots \end{array} \right\} \\ \dots \\ \left\{ \begin{array}{c} \{\phi\}_1^T \\ \{\phi\}_2^T \\ \vdots \end{array} \right\} \end{array} \right]$$



$$= \begin{bmatrix} \frac{2h_1^* \omega_1}{m_1^*} \{\phi\}_1 & \frac{2h_2^* \omega_2}{m_2^*} \{\phi\}_2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T \\ \{\phi\}_2^T \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2h_1^* \omega_1}{m_1^*} \{\phi\}_1 \{\phi\}_1^T + \sum_{i=1}^n \frac{2h_i^* \omega_i}{m_i^*} \{\phi\}_i \{\phi\}_i^T + \cdots = \sum_{i=1}^n \frac{2h_i^* \omega_i}{m_i^*} \{\phi\}_i \{\phi\}_i^T \quad (11.30)$$

である。式(11.30)を式(11.28)に代入すれば、減衰マトリックスが求まる。

$$[C] = [M] \left( \sum_{i=1}^n \frac{2h_i^* \omega_i}{m_i^*} \{\phi\}_i \{\phi\}_i^T \right) [M] \quad (11.31)$$

### 例題 11.c 減衰マトリックス

“図10.1の問題”について、この方法で減衰マトリックスを求めてみよう。  
一般化減衰定数  $h_1^* = h_2^* = 0.05$  とする。

1次モードでは

$$\frac{2h_1^* \omega_1}{m_1^*} = \frac{2 \times 0.05 \times 33.38}{1} = 3.338 \text{ s}^{-1}$$

$$\{\phi\}_1 \{\phi\}_1^T = \begin{Bmatrix} 0.004698 \\ 0.007474 \end{Bmatrix} \{0.004698 \quad 0.007474\} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 2.207 & 3.511 \\ 3.511 & 5.586 \end{bmatrix} \text{ kg}^{-1}$$

$$\therefore \frac{2h_1^* \omega_1}{m_1^*} \{\phi\}_1 \{\phi\}_1^T = 3.338 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 2.207 & 3.511 \\ 3.511 & 5.586 \end{bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.7367 & 1.172 \\ 1.172 & 1.865 \end{bmatrix} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

2次モードでは

$$\frac{2h_2^* \omega_2}{m_2^*} = \frac{2 \times 0.05 \times 73.39}{1} = 7.339 \text{ s}^{-1}$$

$$\{\phi\}_2 \{\phi\}_2^T = \begin{Bmatrix} -0.005285 \\ 0.006644 \end{Bmatrix} \{-0.005285 \quad 0.006644\} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 2.793 & -3.511 \\ -3.511 & 4.414 \end{bmatrix} \text{ kg}^{-1}$$

$$\therefore \frac{2h_2^* \omega_2}{m_2^*} \{\phi\}_2 \{\phi\}_2^T = 7.339 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 2.793 & -3.511 \\ -3.511 & 4.414 \end{bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 2.050 & -2.577 \\ -2.577 & 3.239 \end{bmatrix} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{i=1}^2 \frac{2h_i^* \omega_i}{m_i^*} \{\phi\}_i \{\phi\}_i^T &= 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.7367 & 1.172 \\ 1.172 & 1.865 \end{bmatrix} + 10^{-4} \begin{bmatrix} 2.050 & -2.577 \\ -2.577 & 3.239 \end{bmatrix} \\ &= 10^{-4} \begin{bmatrix} 2.787 & -1.405 \\ -1.405 & 5.104 \end{bmatrix} \text{kg}^{-1}\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

ゆえに、減衰マトリックスは、式(11.31)より

$$\begin{aligned} [C] &= [M] \left( \sum_{i=1}^2 \frac{2h_i^* \omega_i}{m_i^*} \{\phi\}_i \{\phi\}_i^T \right) [M] = 10^4 \begin{bmatrix} 2.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \\ &\times 10^{-4} \begin{bmatrix} 2.787 & -1.405 \\ -1.405 & 5.104 \end{bmatrix} \times 10^4 \begin{bmatrix} 2.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 11.15 & -2.810 \\ -2.810 & 5.104 \end{bmatrix} \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

である。

すべての一般化減衰定数をひずみエネルギー比例減衰で定めて非線形解析を行う場合、高次モードの一般化減衰定数がかなり小さくなり、その影響が全体の振動に大きな影響を及ぼし、不自然な解析結果が生じる場合がある。なぜならば、高次の基準振動は、複雑な形状で振動するので減衰が大きいと考えられるにもかかわらず、ひずみエネルギー比例減衰で一般化減衰定数を定める場合は、一般に次数の大きさの影響を考慮しないからである。そこで、固有振動数が10Hz程度までのモードの一般化減衰定数は、ひずみエネルギー比例減衰の結果を用い、それ以上の高次の一般化減衰定数は大きな値(たとえば0.5)に設定すると、自然な解析結果となることがある。

### (3) 複雑な系に対する“レーリー減衰の修正型”の適用

系の自由度が大きい場合、減衰マトリックスが、レーリー法ではバンドマトリックス(剛性および質量マトリックスがバンドマトリックスであるから式(11.9)より)になるのに対して、(2)項の方法ではフルマトリックスとなるので、計算時間が大変かかる。したがって、複雑な多自由度系の場合、(2)項の方法はあまり用いられず、またレーリー法をそのまま用いると高次のモードの減衰力を過大に評価することとなるので、以下に述べる“レーリー減衰の修正形”が用いられる場合が多い。

その方法は、まず、“ひずみエネルギー比例減衰”に基づいて、最も主要な2つのモードの一般化減衰定数を計算し、それらによってレーリー減衰の係数

(式(11.9)の  $a_0, a_1$ )を求める。さらに次のような工夫をする。

### (a) 要素別レーリー減衰

要素別レーリー減衰とは、系に免震要素(免震支承)が存在する場合、 $[C] = a_0[M] + a_1[K]$ における  $[K]$ の免震要素の剛性を0として計算する方法である。なぜならば、剛性マトリックス  $[K]$ は、免震要素の大きな初期剛性を用いて計算されるので、それをそのまま用いると免震要素の減衰力が過大に評価されるからである。

### (b) 瞬間剛性比例減衰

非線形解析において塑性域に入っても、 $[C] = a_0[M] + a_1[K]$ における  $[K]$ として初期剛性マトリックスを用いると、減衰力が過大に評価される可能性がある。“瞬間剛性比例減衰”は、剛性が変化するごとに、 $[C] = a_0[M] + a_1[K]$ における  $[K]$ として接線剛性(瞬間剛性、第16章参照)を用いる方法である。

## 11.4 地盤動に対する減衰応答

### (1) 地盤動に対する応答

地盤動に対する減衰振動の運動方程式は、式(9.25)より

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = -[M]\{1\}\ddot{x}_g \quad (11.32)$$

である。元の変位  $\{x\}$ を基準座標  $\{u\}$ に変数変換して、左からモードマトリックスの転置を乗じると、 $n$ 個の連成しない方程式

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i \ddot{u}_i + \{\phi\}_i^T [C] \{\phi\}_i \dot{u}_i + \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_i u_i = -\{\phi\}_i^T [M] \{1\} \ddot{x}_g \quad (11.33)$$

となる。ただし、 $i=1, 2, \dots, n$ である。これに式(10.24)・(11.7)・(10.25)を代入すると下式になる。

$$m_i^* \ddot{u}_i + 2m_i^* h_i^* \omega_i \dot{u}_i + \omega_i^2 m_i^* u_i = -\{\phi\}_i^T [M] \{1\} \ddot{x}_g$$

両辺を  $m_i^*$ で割り、式(10.40)を代入すると

$$\ddot{u}_i + 2h_i^* \omega_i \dot{u}_i + \omega_i^2 u_i = -\beta_i \ddot{x}_g \quad (11.34)$$

となる。

### (2) 調和地盤動に対する加速度応答倍率

円振動数  $p$ の調和地盤動に対する加速度応答倍率(“地盤加速度の振幅”に対

する“定常振動の絶対加速度の振幅”の比)を求めてみよう。地盤の変位を

$$x_g = b_0 \sin pt \quad (11.35)$$

とする。連続して2回微分すると

$$\dot{x}_g = b_0 p \cos pt, \quad \ddot{x}_g = -b_0 p^2 \sin pt \quad (11.36)$$

となる。これらを式(11.34)に代入すると下式を得る。

$$\ddot{u}_i + 2h_i^* \omega_i \dot{u}_i + \omega_i^2 u_i = \beta_i b_0 p^2 \sin pt \quad (11.37)$$

$i$ 次モードの対する振動数比を  $r_i = p/\omega_i$  とおくと、この定常解  $u_i$  は、式(3.25)の定常応答の項で  $a_0$  を  $\beta_i b_0$  に置き換えるたものであるから

$$u_i = A_i \sin(pt + \theta_i) \quad (11.38)$$

$$A_i = \frac{\beta_i b_0 r_i^2}{\sqrt{\{1-r_i^2\}^2 + 4h_i^{*2} r_i^2}} \quad (11.39)$$

$$\sin \theta_i = \frac{-2h_i^* r_i}{\sqrt{\{1-r_i^2\}^2 + 4h_i^{*2} r_i^2}}, \quad \cos \theta_i = \frac{1-r_i^2}{\sqrt{\{1-r_i^2\}^2 + 4h_i^{*2} r_i^2}} \quad (11.40)$$

である。ここで

$$B_i = \frac{r_i^2}{\sqrt{\{1-r_i^2\}^2 + 4h_i^{*2} r_i^2}} \quad (11.41)$$

とおくと、式(11.38)は

$$u_i = \beta_i b_0 B_i \sin(pt + \theta_i) \quad (11.42)$$

となる。この式を2回微分すると

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i &= -\beta_i b_0 B_i p^2 \sin(pt + \theta_i) \\ &= -\beta_i b_0 B_i p^2 (\cos \theta_i \sin pt + \sin \theta_i \cos pt) \end{aligned} \quad (11.43)$$

となる。

したがって、節点  $k$  の絶対加速度は、式(11.43)・(11.36)より

$$\begin{aligned} \ddot{X}_k &= \ddot{x}_k + \ddot{x}_g = \sum_{i=1}^n \phi_{ki} \ddot{u}_i + \ddot{x}_g \\ &= -b_0 p^2 \sum_{i=1}^n \{ \beta_i \phi_{ki} B_i (\cos \theta_i \sin pt + \sin \theta_i \cos pt) \} - b_0 p^2 \sin pt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -b_0 p^2 \left\{ \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_{ki} B_i \cos \theta_i + 1 \right) \sin pt + \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_{ki} B_i \sin \theta_i \right) \cos pt \right\} \\
 &= -b_0 p^2 (D_{k1} \sin pt + D_{k2} \cos pt) \\
 &= -b_0 p^2 \sqrt{D_{k1}^2 + D_{k2}^2} \left( \frac{D_{k1}}{\sqrt{D_{k1}^2 + D_{k2}^2}} \sin pt + \frac{D_{k2}}{\sqrt{D_{k1}^2 + D_{k2}^2}} \cos pt \right) \\
 &= -b_0 p^2 \sqrt{D_{k1}^2 + D_{k2}^2} (\cos \alpha \sin pt + \sin \alpha \cos pt)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \ddot{X}_k = -b_0 p^2 \sqrt{D_{k1}^2 + D_{k2}^2} \sin(pt + \alpha) \quad (11.44)$$

である。ただし

$$D_{k1} = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_{ki} B_i \cos \theta_i + 1, \quad D_{k2} = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_{ki} B_i \sin \theta_i \quad (11.45)$$

$$\cos \alpha = \frac{D_{k1}}{\sqrt{D_{k1}^2 + D_{k2}^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{D_{k2}}{\sqrt{D_{k1}^2 + D_{k2}^2}} \quad (11.46)$$

である。したがって、加速度応答倍率は以下のとおりである。

$$D_a = \left| \ddot{X}_k / \ddot{x}_g \right| = \sqrt{D_{k1}^2 + D_{k2}^2} \quad (11.47)$$

#### 例題 11.d 加速度応答倍率

“図10.1の問題”について、1次モードの共振点  $p = \omega_1 = 33.38 \text{ rad/s}$  の加速度応答倍率を求めよう。ただし、一般化減衰定数  $h_1^* = h_2^* = 0.05$  とする

1次モードに対する振動数比  $r_1 = p/\omega_1 = 1$  を式(11.40)・(11.41)に代入すると

$$\sin \theta_1 = -2h_1^* r_1 / \sqrt{\{1 - r_1^2\}^2 + 4h_1^{*2} r_1^2} = -1.0$$

$$\cos \theta_1 = (1 - r_1^2) / \sqrt{\{1 - r_1^2\}^2 + 4h_1^{*2} r_1^2} = 0.0$$

$$B_1 = r_1^2 / \sqrt{\{1 - r_1^2\}^2 + 4h_1^{*2} r_1^2} = \frac{1}{2 \times 0.05} = 10.0$$

となる。2次モードに対する振動数比  $r_1 = 33.38/73.39 = 0.4548$  を式(11.40)・(11.41)に代入すると

$$\sin \theta_2 = -2 \times 0.05 \times 0.4548 / \sqrt{(1 - 0.4548^2)^2 + 4 \times 0.05^2 \times 0.4548^2} = -0.05725$$

$$\cos \theta_2 = (1 - 0.4548^2) / \sqrt{(1 - 0.4548^2)^2 + 4 \times 0.05 \times 0.4548^2} = 0.9934$$

$$B_2 = 0.4548^2 / \sqrt{(1 - 0.4548^2)^2 + 4 \times 0.05^2 \times 0.4548^2} = 0.2604$$

となる。

節点 1 では、式(11.45)より

$$\begin{aligned} D_{11} &= \sum_{i=1}^2 \beta_i \phi_i B_i \cos \theta_i + 1 = 168.7 \times 0.004698 \times 10.0 \times 0 \\ &\quad - 39.26 \times (-0.005285) \times 0.2604 \times 0.9934 + 1 = 1.054 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{12} &= \sum_{i=1}^2 \beta_i \phi_i B_i \sin \theta_i = 168.7 \times 0.004698 \times 10.0 \times (-1.0) \\ &\quad - 39.26 \times (-0.005285) \times 0.2604 \times (-0.05725) = -7.929 \end{aligned}$$

である。したがって、加速度応答倍率は、式(11.47)より

$$D_a = |\ddot{X}_1 / \ddot{x}_g| = \sqrt{D_{11}^2 + D_{12}^2} = \sqrt{1.054^2 + (-7.929)^2} = 8.070$$

である。

節点 2 では、同様に

$$\begin{aligned} D_{21} &= \sum_{i=1}^2 \beta_i \phi_{2i} B_i \cos \theta_i + 1 = 168.7 \times 0.007474 \times 10.0 \times 0 \\ &\quad - 39.26 \times 0.006644 \times 0.2604 \times 0.9934 + 1 = 0.9325 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{22} &= \sum_{i=1}^2 \beta_i \phi_{2i} B_i \sin \theta_i = 168.7 \times 0.007474 \times 10.0 \times (-1.0) \\ &\quad - 39.26 \times 0.006644 \times 0.2604 \times (-0.05725) = -12.605 \end{aligned}$$

である。

したがって、加速度応答倍率は

$$D_a = |\ddot{X}_2 / \ddot{x}_g| = \sqrt{D_{21}^2 + D_{22}^2} = \sqrt{0.9325^2 + (-12.605)^2} = 12.639$$

である。このようにして、節点 1 における調和地盤動の円振動数  $p$  に対する加

速度応答倍率の関係を求めた結果を図 11.d に示す。図では、振動数  $f = p/2\pi$  に対して示した。1 次と 2 次モードの固有振動数は、 $f_1 = \omega_1/2\pi = 5.313\text{Hz}$  と  $f_2 = \omega_2/2\pi = 11.68\text{Hz}$  である。固有振動数付近で、加速度応答倍率が高いことがわかる。

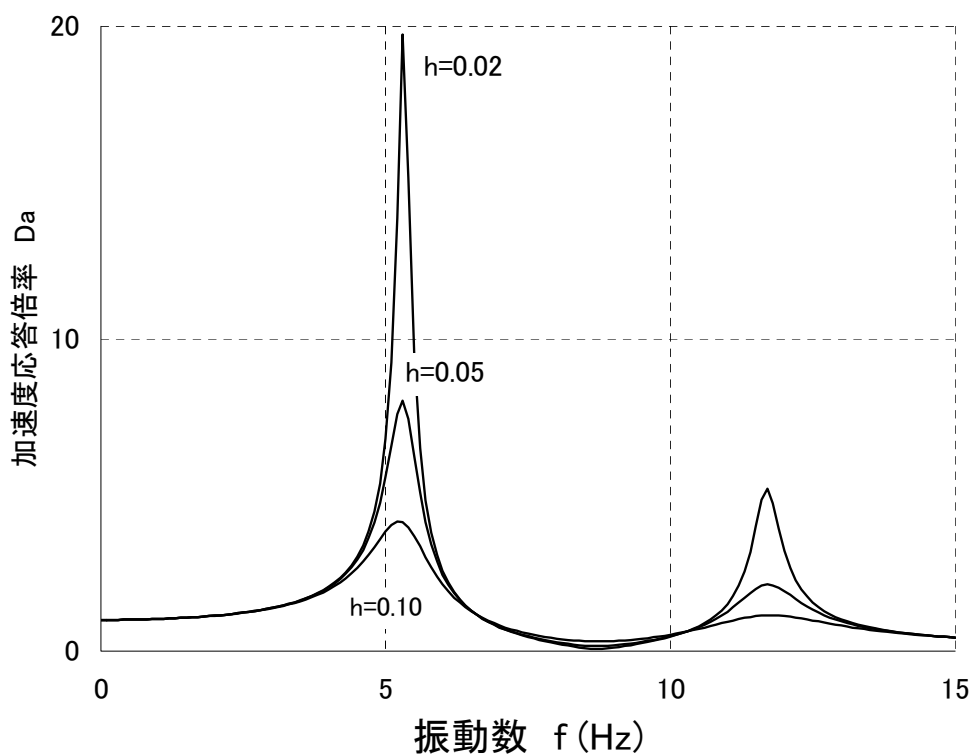


図11.d 加速度応答倍率

### 11.5 要約

多自由度系における減衰力の定め方には問題がある。それについてよく理解していないと、複雑な系では、不適當な解析結果となる場合がある。

#### 第 3-3 部の参考文献

[3-3.1] Mario Paz, (1997), “Structural Dynamics”, Chapman & Hall.

[3-3.2] 柴田明德, (2000), “最新耐震構造解析”, 森北出版株式会社。

## 第 3-4 部 平面骨組系のモード解析

節点と要素で構成される系を**骨組系**とよぶ。これは、動的解析ではバネ・マスモデルと同じ意味を持つが、静的解析における質量を考慮する必要がない場合にも用いられる。したがって、両者のニュアンスに違いがある。

いままでは“モード解析の概念”を説明するために、1つの節点が1方向だけに変位する“せん断建物モデル”を用いてきた。しかし、最も一般性があるバネ・マスモデルは、1つの節点が6自由度の立体(3次元)骨組系である。3次元骨組系は煩雑であるので、この部では、“平面(2次元)骨組系”を用いて“骨組系のモード解析の概念”を説明する。平面骨組系がせん断建物モデルと異なる点は、① 1節点が3自由度である、②要素軸が種々の方向に向いているので、解析するためには、要素座標系で表わされた力あるいは変位を全体座標系に変換する必要がある、ことである。

コンシステント・マスは、計算能力の低い時代に、計算精度を上げるために開発された方法である。この意味を調べようとすると、解説した本がほとんどないために、大変に苦勞する。そこで、ここでかなりの紙面を割いて解説した。しかし、コンピュータの発達した現在では、要素分割を細かくできるので、土木・建築の実務では、通常、ランプト・マスが用いられ、コンシステント・マスをを用いることが少ない。したがって、多くの読者はその意味だけを知れば十分である。その場合、12.1 節(2)項(b)の最初の4行だけを読めばよい。ただし、コンピュータにたよるだけではなく、このような方法を理解することは、振動学に対する理解を深めることになる。

## 第 12 章 要素の剛性および質量マトリックス

第9章で述べたように、運動方程式を構築するために最も重要な作業は、“要素の剛性と質量マトリックスの作成”である。この章では、平面骨組系の構成要素である棒要素およびビーム・カラム要素の剛性と質量マトリックスを作成方法を説明する。構造解析プログラムでは、通常、ビーム・カラム要素は“はり要素”とよばれているが、はり要素は軸方向の変形を考慮しない要素を意味す



る場合があるので、この本では、ビーム・カラム要素とよぶ。なお、要素の長さを  $l(m)$ 、断面積を  $A(m^2)$ 、断面 2 次モーメントを  $I(m^4)$ 、慣性モーメントを  $J(m^4)$ 、ヤング率を  $E(kN/m^2)$  および単位体積質量を  $\rho(kg/m^3)$  とする。梁理論の仮定は、①断面形は不変である、②断面は平面保持する(Bernouli-Euler の仮定)、③変形は微小である(変形前の形状で力はつり合う)、とする。

### 12.1 棒要素

棒要素(rod element)は、トラスの部材のように、両端に軸力だけが作用し、軸方向にだけ変形する要素である。図 12.1(a)に示すように、要素座標系の  $x$  軸は要素軸で、 $a$  端を原点とし、それから他の端( $b$  端)の方向を正とする。なお、 $a$  端として、どちらの端を選んでもよい。

#### (1) 剛性マトリックス

図 12.1(a)は、要素の変形前の状態を示している。同(b)は、変形時の復元力と変位の関係を示している。 $(u_{xa}, u_{xb})$  および  $(Q_{xa}, Q_{xb})$  は、要素の  $a$  端と  $b$  端における変位(ここでは、 $u$  は基準座標ではないことに注意)および復元力である。図ではそれらの正方向を示している。これらの復元力は、反作用として節点に作用する力である。また、添字の  $x$  は“要素座標系の  $x$  方向”を表す。

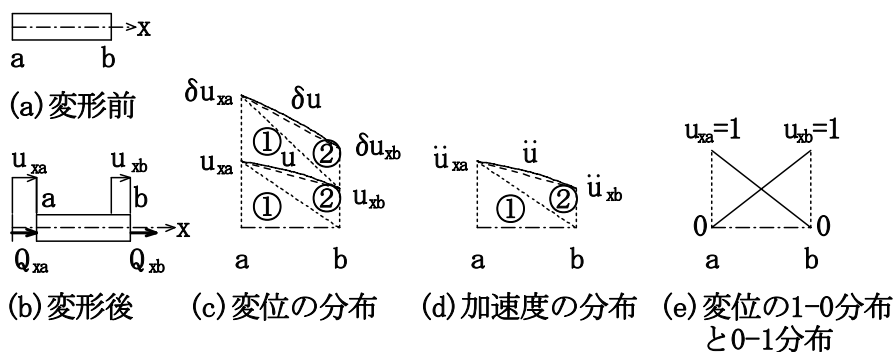


図12.1 棒要素

“力のつり合い”と“フックの法則”から

$$Q_{xa} + Q_{xb} = 0, \quad \frac{Q_{xa}}{A} = E \frac{u_{xa} - u_{xb}}{l}, \quad \therefore Q_{xa} = -Q_{xb} = \frac{AE}{l} (u_{xa} - u_{xb}) \quad (12.1)$$

である。ベクトル・行列表示すると

$$\begin{Bmatrix} Q_{xa} \\ Q_{xb} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xa} \\ u_{xb} \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \{Q_x\} = [K]\{u_x\} \quad (12.2)$$

である。したがって、要素の剛性マトリックス $[K]$ は

$$[K] = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{xa} & u_{xb} \\ Q_{xa} \\ Q_{xb} \end{matrix} \quad (12.3)$$

である。なお、この章では、一つの要素の剛性あるいは質量マトリックスを論じるので、煩雑にならないように、要素番号は割愛した。

## (2) 質量マトリックス

### (a) ランプト・マス

ランプト・マスは、要素の分布質量を  $a$  端と  $b$  端に等分に分配する仮定であるから、要素の質量マトリックスは

$$[M] = \begin{bmatrix} m/2 & 0 \\ 0 & m/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ddot{u}_{xa} & \ddot{u}_{xb} \\ F_{xa} \\ F_{xb} \end{matrix}, \quad m = \rho Al \quad (12.4)$$

である。 $(\ddot{u}_{xa}, \ddot{u}_{xb})$  および  $(F_{xa}, F_{xb})$  は、 $a$  端と  $b$  端の加速度および慣性力である。

### (b) コンシステント・マス

コンシステント・マス(consistent mass)とは、要素の各部分が同じ振動数で調和振動している状態で、変位の要素内分布をある形状に仮定して“その要素の分布している質量”を“両端の節点の集中質量”に慣性力の仕事において等価に置き換える方法で、ランプト・マスをを用いる場合より計算精度が高い。

位置  $x$  の時刻  $t$  における変位  $u$  と加速度  $\ddot{u}$  を図 12.1(c) と (d) に、 $t$  から  $t + \Delta t$  間の微小時間における微小変位  $\delta u$  を同図(c)に、それぞれ実線で示す。 $(\ddot{u}_{xa}, \ddot{u}_{xb})$  および  $(\delta u_{xa}, \delta u_{xb})$  は  $a$  端と  $b$  端の加速度および微小変位である。

円振動数  $\omega$  で調和振動している場合、変位  $u$  と加速度  $\ddot{u}$  は

$$\ddot{u} = -\omega^2 u \quad \therefore u = -\frac{1}{\omega^2} \ddot{u} \quad (12.5)$$

の関係がある。当然、両端においても同じ関係が成り立つ。

$$u_{xa} = -\frac{1}{\omega^2} \ddot{u}_{xa}, \quad u_{xb} = -\frac{1}{\omega^2} \ddot{u}_{xb} \quad (12.6)$$

分布質量の慣性力を求めよう。要素の中間における変位を，“要素の中間に力が作用しない条件で近似する”と，図 12.(c)の破線で示すように， $u$  と  $\delta u$  の近似曲線は

$$u = u_{xa} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + u_{xb} \frac{x}{l}, \quad \delta u = \delta u_{xa} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \delta u_{xb} \frac{x}{l} \quad (12.7)$$

となる(この場合は直線である)。式(12.7)の第 1 式に式(12.5)・(12.6)を代入し，両辺に  $-\omega^2$  を乗じると

$$\ddot{u} = \ddot{u}_{xa} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \ddot{u}_{xb} \frac{x}{l} \quad (12.8)$$

となる(図 12.1(d)の破線)。ここで

$$x_{10} = 1 - \frac{x}{l}, \quad x_{01} = \frac{x}{l} \quad (12.9)$$

と置くと，式(12.7)・(12.8)は

$$u = u_{xa} x_{10} + u_{xb} x_{01}, \quad \delta u = \delta u_{xa} x_{10} + \delta u_{xb} x_{01}, \quad \ddot{u} = \ddot{u}_{xa} x_{10} + \ddot{u}_{xb} x_{01} \quad (12.10)$$

と表わすことができる。式(12.10)の各式の第 1 項と第 2 項は，図 12.1(c)と(d)の破線を点線で分割した，それぞれ①と②の部分である。 $x_{10}$  と  $x_{01}$  の物理的な意味は，図 12.1(e)に示すように，それぞれ  $a$  端と  $b$  端の変位が  $(u_{xa} = 1, u_{xb} = 0)$  と  $(u_{xa} = 0, u_{xb} = 1)$  で要素の中間に力が作用しない場合の変位曲線である。それぞれを  $x$  方向の 1-0 変位曲線と 0-1 変位曲線とよぶことにする。したがって，変位  $u$ ，微小変位  $\delta u$  および加速度  $\ddot{u}$  の近似曲線は，ともに“ $a$  端の大きさに 1-0 変位曲線を乗じたもの”と“ $b$  端の大きさに 0-1 変位曲線を乗じたもの”の重ね合わせである。

さて，位置  $x$  における単位長さの慣性力  $(-\rho A \ddot{u})$  は，式(12.10)より

$$-\rho A \ddot{u} = -\rho A \ddot{u}_{xa} x_{10} - \rho A \ddot{u}_{xb} x_{01} \quad (12.11)$$

である。したがって，微小変位に対する分布慣性力の仕事は

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^l \delta u (-\rho A \ddot{u}) dx = -\int_0^l (\delta u_{xa} x_{10} + \delta u_{xb} x_{01}) (\rho A \ddot{u}_{xa} x_{10} + \rho A \ddot{u}_{xb} x_{01}) dx \\ \therefore \delta W &= -\left(\rho A \int_0^l x_{10}^2 dx\right) \delta u_{xa} \ddot{u}_{xa} - \left(\rho A \int_0^l x_{10} x_{01} dx\right) \delta u_{xa} \ddot{u}_{xb} \\ &\quad - \left(\rho A \int_0^l x_{01} x_{10} dx\right) \delta u_{xb} \ddot{u}_{xa} - \left(\rho A \int_0^l x_{01}^2 dx\right) \delta u_{xb} \ddot{u}_{xb} \end{aligned} \quad (12.12)$$

である。

次に、等価集中質量の慣性力の仕事を求めよう。節点  $a$  と節点  $b$  の等価慣性力  $F_{xa}$  と  $F_{xb}$  と質量マトリックス  $[M]$  の関係は

$$\begin{Bmatrix} F_{xa} \\ F_{xb} \end{Bmatrix} = -[M] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{xa} \\ \ddot{u}_{xb} \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \begin{Bmatrix} F_{xa} \\ F_{xb} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{xa} \\ \ddot{u}_{xb} \end{Bmatrix} \quad (12.13)$$

あるいは

$$\begin{cases} F_{xa} = -m_{11}\ddot{u}_{xa} - m_{12}\ddot{u}_{xb} \\ F_{xb} = -m_{21}\ddot{u}_{xa} - m_{22}\ddot{u}_{xb} \end{cases} \quad (12.14)$$

である。

微小変位に対する等価慣性力の仕事  $\delta W'$  は

$$\delta W' = \delta u_{xa} F_{xa} + \delta u_{xb} F_{xb} \quad (12.15)$$

である。この式に(12.14)を代入すると以下のとおりとなる。

$$\delta W' = -m_{11}\delta u_{xa}\ddot{u}_{xa} - m_{12}\delta u_{xa}\ddot{u}_{xb} - m_{21}\delta u_{xb}\ddot{u}_{xa} - m_{22}\delta u_{xb}\ddot{u}_{xb} \quad (12.16)$$

$\delta W = \delta W'$  であるから、式(12.12)から(12.16)を引くと

$$\begin{aligned} & \left( m_{11} - \rho A \int_0^l x_{10}^2 dx \right) \delta u_{xa} \ddot{u}_{xa} + \left( m_{12} - \rho A \int_0^l x_{10} x_{01} dx \right) \delta u_{xa} \ddot{u}_{xb} \\ & + \left( m_{21} - \rho A \int_0^l x_{01} x_{10} dx \right) \delta u_{xb} \ddot{u}_{xa} + \left( m_{22} - \rho A \int_0^l x_{01}^2 dx \right) \delta u_{xb} \ddot{u}_{xb} = 0 \end{aligned} \quad (12.17)$$

となる。任意の  $\delta u_a, \delta u_b, \ddot{u}_a, \ddot{u}_b$  すなわち任意の  $(\delta u_a \ddot{u}_a), (\delta u_a \ddot{u}_b), (\delta u_b \ddot{u}_a), (\delta u_b \ddot{u}_b)$  に対して、式(12.17)が常に成り立つためには

$$\begin{cases} m_{11} - \rho A \int_0^l x_{10}^2 dx = 0, & m_{12} - \rho A \int_0^l x_{10} x_{01} dx = 0 \\ m_{21} - \rho A \int_0^l x_{01} x_{10} dx = 0, & m_{22} - \rho A \int_0^l x_{01}^2 dx = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m_{11} = \rho A \int_0^l x_{10}^2 dx, & m_{12} = \rho A \int_0^l x_{10} x_{01} dx \\ m_{21} = \rho A \int_0^l x_{01} x_{10} dx, & m_{22} = \rho A \int_0^l x_{01}^2 dx \end{cases} \quad (12.18)$$

でなければならない。この式に(12.9)を代入すると

$$\begin{cases} m_{11} = \rho A \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{\rho A l}{3} = \frac{m}{3} \\ m_{12} = m_{21} = \rho A \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} dx = \frac{m}{6}, & m_{22} = \rho A \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{m}{3} \end{cases} \quad (12.19)$$

となる。したがって、要素の質量マトリックスは

$$[M] = \begin{bmatrix} \ddot{u}_{xa} & \ddot{u}_{xb} \\ m/3 & m/6 \\ m/6 & m/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xa} \\ F_{xb} \end{bmatrix} \quad (12.20)$$

である。

質量マトリックスの成分の意味を考察してみよう。式(12.17)の左辺の第 1 式は、(12.18)より 0 であるから、移項すると

$$m_{11} \delta u_{xa} \ddot{u}_{xa} = \int_0^l \underbrace{\delta u_{xa} x_{10}}_{\text{微小変位}} \cdot \underbrace{\rho A (\ddot{u}_{xa} x_{10}) dx}_{\text{振動学の慣性力}} \quad (12.21)$$

である。この式の右辺は、“a 端の微小変位  $\delta_{xa}$  に 1-0 変位曲線  $x_{10}$  を乗じた変位” に対する “a 端の加速度  $\ddot{u}_{xa}$  に 1-0 変位曲線  $x_{10}$  を乗じた加速度の振動学の慣性力(符号のマイナスを無視, 9.5 (1) を参照)” の仕事である。a 端の微小変位と加速度がともに単位長さ、すなわち  $\delta_{xa} = 1, \ddot{u}_{xa} = 1$  の場合、式(12.21)は

$$m_{11} = \int_0^l \underbrace{x_{10}}_{\text{微小変位}} \cdot \underbrace{\rho A (x_{10}) dx}_{\text{振動学の慣性力}} \quad (12.22)$$

となる。すなわち、 $m_{11}$  は、図 12.2(a)に示すように、1-0 変位曲線  $x_{10}$  の(微小)変位に対する “加速度が 1-0 変位曲線  $x_{10}$  の振動学の慣性力” の仕事である。同様に、 $m_{12}$  および  $m_{21}$  は、それぞれ 1-0 変位曲線  $x_{10}$  の変位に対する “加速度が 0-1 変位曲線  $x_{10}$  の振動学の慣性力” の仕事および 0-1 変位曲線  $x_{10}$  の変位に対する “加速度が 1-0 変位曲線  $x_{10}$  の振動学の慣性力” の仕事である(それぞれ図 12.2(b)と(c))。式(12.18)より  $m_{12}$  と  $m_{21}$  は等しいから、質量マトリックスは対称行列である。また、 $m_{22}$  は、0-1 変位曲線  $x_{10}$  の変位に対する “加速度が 0-1 変位曲線  $x_{10}$  の振動学の慣性力の仕事” である(図 12.2 (d))。

## 12.2 はり要素

はり要素(beam element)は、図 12.2 に示すように、両端に “曲げモーメント” と “軸方向に直角な荷重” が作用し、曲げ変形する要素である。これは、ビーム・カラム要素を説明するために、仮に設けた要素である。要素座標系の  $x$  軸および  $y$  軸は、それぞれ要素の軸方向および軸直角方向である。

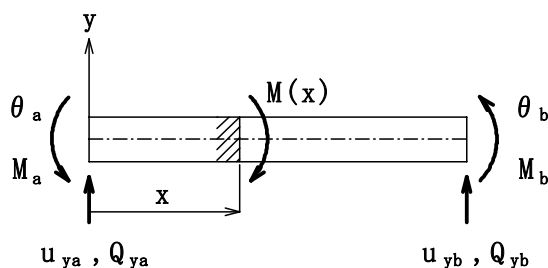


図12.2 はり要素

### (1) 剛性マトリックス

図12.2の $Q_y$ と $M$ はそれぞれ“ $y$ 方向の力”と“曲げモーメント”， $u_y$ と $\theta$ はそれぞれ“ $y$ 方向の変位”と“角変位(回転)”を表している。図にそれらの正方向を示した。

復元力と変位の関係を求めよう。力のつり合いから

$$Q_{ya} + Q_{yb} = 0 \quad (12.23)$$

$$M_a + M_b - Q_{ya}l = 0 \quad (12.24)$$

である。たわみ $u_y$ に関する微分方程式は、位置 $x$ の曲げモーメントを $M(x)$ とすると

$$EI \frac{d^2 u_y}{dx^2} = -M(x) \quad (12.25)$$

である。 $M(x)$ は

$$M(x) = -Q_{ya}x + M_a \quad (12.26)$$

であるから、これを式(12.25)に代入すると

$$EI \frac{d^2 u_y}{dx^2} = Q_{ya}x - M_a \quad (12.27)$$

となる。2回連続して積分すると

$$EI \frac{du_y}{dx} = \frac{1}{2} Q_{ya} x^2 - M_a x + C_1 \quad (12.28)$$

$$EI u_y = \frac{1}{6} Q_{ya} x^3 - \frac{1}{2} M_a x^2 + C_1 x + C_2 \quad (12.29)$$

となる。式(12.28)・(12.29)に、 $x=0$ の境界条件( $du_y/dx = \theta_a, u_y = u_{ya}$ )を代入すると

$$EI\theta_a = C_1, \quad EIy_{ya} = C_2$$

である。これらを式(12.28)・(12.29)に代入すると

$$EI \frac{du_y}{dx} = \frac{1}{2} Q_{ya} x^2 - M_a x + EI\theta_a \quad (12.30)$$

$$EIu_y = \frac{1}{6} Q_{ya} x^3 - \frac{1}{2} M_a x^2 + EI\theta_a x + EIu_{ya} \quad (12.31)$$

となる。

式(12.30)・(12.31)に  $x=l$  の境界条件 ( $du_y/dx = \theta_b, u_y = u_{yb}$ ) を代入すると

$$EI\theta_b = \frac{1}{2} Q_{ya} l^2 - M_a l + EI\theta_a \quad (12.32)$$

$$EIu_{yb} = \frac{1}{6} Q_{ya} l^3 - \frac{1}{2} M_a l^2 + EI\theta_a l + EIu_{ya} \quad (12.33)$$

となる。

復元力 ( $Q_{ya}, Q_{yb}, M_a, M_b$ ) に関する連立 1 次方程式(12.23)・(12.24)・(12.32)・(12.33)を復元力について解けば、復元力を変位 ( $y_a, y_b, \theta_a, \theta_b$ ) で記述することができる。式(12.32)から(12.33)を 2 倍したもの引くと、 $M_a$  が消去され

$$Q_{ya} = EI \left( \frac{12}{l^3} u_{ya} + \frac{6}{l^2} \theta_a - \frac{12}{l^3} u_{yb} + \frac{6}{l^2} \theta_b \right) \quad (12.34)$$

となる。式(12.32)から(12.33)を 3 倍したもの引くと、 $Q_{ya}$  が消去され

$$M_a = EI \left( \frac{6}{l^2} u_{ya} + \frac{4}{l} \theta_a - \frac{6}{l^2} u_{yb} + \frac{2}{l} \theta_b \right) \quad (12.35)$$

となる。式(12.34)を(12.23)に代入すると

$$Q_{yb} = EI \left( -\frac{12}{l^3} u_{ya} - \frac{6}{l^2} \theta_a + \frac{12}{l^3} u_{yb} - \frac{6}{l^2} \theta_b \right) \quad (12.36)$$

となる。式(12.34)・(12.35)を(12.24)に代入すると  $M_b$  が求まる。

$$M_b = EI \left( \frac{6}{l^2} u_{ya} + \frac{2}{l} \theta_a - \frac{6}{l^2} u_{yb} + \frac{4}{l} \theta_b \right) \quad (12.37)$$

式(12.34)・(12.35)・(12.36)・(12.37)をベクトル行列表示すると

$$\begin{Bmatrix} Q_{ya} \\ M_a \\ Q_{yb} \\ M_b \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ya} \\ \theta_a \\ u_{yb} \\ \theta_b \end{Bmatrix} \quad (12.38)$$

となる。ゆえに、要素の剛性マトリックスは、以下のとおりである。

$$[K] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{ya} \\ M_a \\ Q_{yb} \\ M_b \end{Bmatrix} \quad (12.39)$$

## (2) 質量マトリックス

### (a) ランプト・マス

ランプト・マスの場合は、慣性モーメントが無視し、質量を等分に節点に分配するから、要素の質量マトリックスは

$$[M] = \begin{bmatrix} m/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{ya} \\ \ddot{\theta}_a \\ \ddot{u}_{yb} \\ \ddot{\theta}_b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{ya} \\ \bar{M}_a \\ F_{yb} \\ \bar{M}_b \end{Bmatrix} \quad (12.40)$$

である。ここで $(\ddot{\theta}_a, \ddot{\theta}_b)$ と $(\bar{M}_a (= -J\ddot{\theta}_a), \bar{M}_b (= -J\ddot{\theta}_b))$ は、“角加速度”と“広義の慣性力”である。

### (b) コンシステント・マス

質量マトリックスは、一般に以下のように表現できる。

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{ya} \\ \ddot{\theta}_a \\ \ddot{u}_{yb} \\ \ddot{\theta}_b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{ya} \\ \bar{M}_a \\ F_{yb} \\ \bar{M}_b \end{Bmatrix} \quad (12.41)$$

図 12.3(a)に示す，“要素端の変位の内， $a$  端の  $y$  方向が単位長さ 1 で他が 0”すなわち“境界条件  $u_{ya} = 1, \theta_a = u_{yb} = \theta_b = 0$ ”で要素の中間に力が作用しない場



合の変位曲線(y方向 1-0 変位曲線  $y_{10}$ )を求めよう。式(12.35)で  $u_y = y_{10}$  とおき、式(12.31)・(12.32)・(12.33)に境界条件を代入すると

$$EIy_{10} = \frac{1}{6}Q_{ya}x^3 - \frac{1}{2}M_ax^2 + EI \quad (12.42)$$

$$0 = \frac{1}{2}Q_{ya}l^2 - M_al \quad (12.43)$$

$$0 = \frac{1}{6}Q_{ya}l^3 - \frac{1}{2}M_al^2 + EI \quad (12.44)$$

となる。これらの式から  $Q_{ya}$  と  $M_b$  を消去すると、以下のように  $y_{10}$  が求まる。

$$y_{10} = \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + 1 \quad (12.45)$$

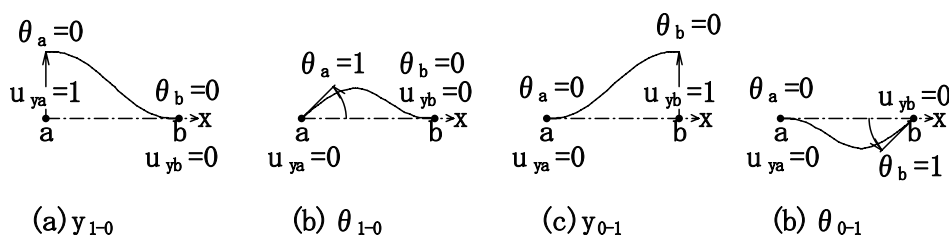


図12.3 はり要素の変位曲線

図 12.3(b)に示す，“境界条件  $u_{ya} = 0, \theta_a = 1, u_{yb} = \theta_b = 0$ ” で要素の中間に力が作用しない場合の変位曲線( $\theta$ 方向 1-0 変位曲線  $\theta_{10}$ )を求めよう。式(12.31)で  $u_y = \theta_{10}$  とおき、式(12.31)・(12.32)・(12.33)に境界条件を代入すると

$$EI\theta_{10} = \frac{1}{6}Q_{ya}x^3 - \frac{1}{2}M_ax^2 + Elx \quad (12.46)$$

$$0 = \frac{1}{2}Q_{ya}l^2 - M_al + EI \quad (12.47)$$

$$0 = \frac{1}{6}Q_{ya}l^3 - \frac{1}{2}M_al^2 + EI \quad (12.48)$$

となる。これらの式から  $Q_{ya}$  と  $M_b$  を消去すると、以下のように  $\theta_{10}$  が求まる。

$$\theta_{10} = x \left( \frac{x}{l} - 1 \right)^2 \quad (12.49)$$

図 12.3(c)に示す，“境界条件  $u_{ya} = \theta_a = 0, u_{yb} = 1, \theta_b = 0$ ” で要素の中間に力が作用しない場合の変位曲線 ( $y$  方向 0-1 変位曲線  $y_{01}$ ) を求めよう。  $y_{01}$  は  $x = l/2$  に対して  $y_{10}$  と線対称である。  $(x, y_{10})$  と線対称の点を  $(X, y_{01})$  とすると

$$\frac{x+X}{2} = \frac{l}{2}, \quad \therefore x = l - X, \quad \text{また } \psi_{01} = \psi_{10}$$

である。これらを式(12.45)に代入し、  $X$  を  $x$  に変更すると、  $y_{01}$  が求まる。

$$y_{01} = -\frac{2x^3}{l^3} + \frac{3x^2}{l^2} \tag{12.50}$$

図 12.3(d)に示す，“境界条件  $u_{ya} = \theta_a = u_{yb} = 0, \theta_b = 1$ ” で要素の中間に力が作用しない場合の変位曲線 ( $\theta$  方向 01 変位曲線  $\theta_{01}$ ) を求めよう。  $\theta_{01}$  は、点  $(x = l/2, \psi = 0)$  に対して  $\theta_{10}$  と点对称である。  $(x, \theta_{10})$  と点对称の点を  $(X, \theta_{01})$  とすると

$$\frac{x+X}{2} = \frac{l}{2}, \quad \therefore x = l - X, \quad \theta_{10} = -\theta_{01}$$

である。これらを式(12.49)に代入し、  $X$  を  $x$  に変更すると、  $\theta_{01}$  が求まる。

$$\theta_{01} = \frac{x^2}{l} \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \tag{12.51}$$

12.1 節からわかるように、  $m_{11}$  は“微小変位が  $y$  方向 1-0 変位曲線  $y_{10}$ ” で“加速度が  $y$  方向 1-0 変位曲線  $y_{10}$  の振動学の慣性力”の仕事である。その場合、微小変位  $\delta u$  と  $x$  の位置の単位長さ当たりの振動学の慣性力  $f$  は

$$\delta u = \psi_1, \quad f = \rho A \psi_1 \tag{12.52}$$

である。したがって、  $m_{11}$  は以下のとおりである。

$$m_{11} = \int_0^l \delta u (f dx) = \rho A \int_0^l y_{10}^2 dx = \frac{m}{l} \int_0^l y_{10}^2 dx \tag{12.53}$$

$$\therefore m_{11} = \frac{m}{l} \int_0^l \left( \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + 1 \right)^2 dx = \frac{13}{35} m \tag{12.54}$$

$m_{12}$  は“微小変位が  $y$  方向 1-0 変位曲線  $y_{10}$ ” で“加速度が  $\theta$  方向 1-0 変位曲線  $\theta_{10}$  の振動学の慣性力”の仕事である。その場合、微小変位  $\delta u$  と  $x$  の位置の単位長さ当たりの振動学の慣性力  $f$  は

$$\delta u = \psi_1, \quad f = \rho A \psi_2 \tag{12.55}$$

である。したがって、 $m_{12}$  は以下のとおりである。

$$m_{12} = \int_0^l \delta u(f dx) = \rho A \int_0^l \theta_{10} y_{10} dx = \frac{m}{l} \int_0^l \theta_{10} y_{10} dx \quad (12.56)$$

$$\therefore m_{12} = \frac{m}{l} \int_0^l \left( \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + 1 \right) \left\{ x \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \right\}^2 dx = \frac{11}{210} ml \quad (12.57)$$

同様に、残りの成分は

$$m_{13} = \frac{m}{l} \int_0^l y_{10} y_{01} dx = \frac{m}{l} \int_0^l \left( \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + 1 \right) \left( -\frac{2x^3}{l^3} + \frac{3x^2}{l^2} \right) dx = \frac{9}{70} ml \quad (12.58)$$

$$m_{14} = \frac{m}{l} \int_0^l y_{10} \theta_{01} dx = \frac{m}{l} \int_0^l \left( \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + 1 \right) \left\{ \frac{x^2}{l} \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \right\} dx = -\frac{13}{420} ml \quad (12.59)$$

$$m_{22} = \frac{m}{l} \int_0^l \theta_{10}^2 dx = \frac{m}{l} \int_0^l \left\{ x \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \right\}^2 dx = \frac{1}{105} ml^2 \quad (12.60)$$

$$m_{23} = \frac{m}{l} \int_0^l \theta_{10} y_{01} dx = \frac{m}{l} \int_0^l \left\{ x \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \right\}^2 \left( -\frac{2x^3}{l^3} + \frac{3x^2}{l^2} \right) dx = \frac{13}{420} ml \quad (12.61)$$

$$m_{24} = \frac{m}{l} \int_0^l \theta_{10} \theta_{01} dx = \frac{m}{l} \int_0^l \left\{ x \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \right\}^2 \left\{ \frac{x^2}{l} \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \right\} dx = -\frac{1}{140} ml^2 \quad (12.62)$$

$$m_{33} = \frac{m}{l} \int_0^l y_{01}^2 dx = \frac{m}{l} \int_0^l \left( -\frac{2x^3}{l^3} + \frac{3x^2}{l^2} \right)^2 dx = \frac{13}{35} m \quad (12.63)$$

$$m_{34} = \frac{m}{l} \int_0^l y_{01} \theta_{01} dx = \frac{m}{l} \int_0^l \left( -\frac{2x^3}{l^3} + \frac{3x^2}{l^2} \right) \left\{ \frac{x^2}{l} \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \right\} dx = \frac{11}{210} ml \quad (12.64)$$

$$m_{44} = \frac{m}{l} \int_0^l \theta_{01}^2 dx = \frac{m}{l} \int_0^l \left\{ \frac{x^2}{l} \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \right\}^2 dx = \frac{1}{105} ml^2 \quad (12.65)$$

である。ゆえに、要素の質量マトリックスは、対称行列であることを考慮すると、以下のとおりとなる。

$$[M] = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} u_{ya} & \ddot{\theta}_a & \ddot{u}_{yb} & \ddot{\theta}_b \\ 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_{ya} \\ \bar{M}_a \\ F_{yb} \\ \bar{M}_b \end{matrix} \quad (12.66)$$

### 12.3 ビーム・カラム要素

ビーム・カラム要素(beam-column element)は、両端に“曲げモーメント”，“軸力”および“軸方向に直角な荷重”が作用し、曲げ変形とともに軸方向に変形する要素である。微小変形仮定であるので、曲げ変形と軸変形は連成しない。したがって、この剛性と質量マトリックスを作成するには、棒要素と梁要素のそれらのマトリックスをそのまま、所定の番地に重ね合わせればよい。

#### (1) 剛性マトリックス

要素の剛性マトリックスは、式(12.3)・(12.39)から次式のように求まる。

$$[K] = \frac{EI}{l^3} \begin{matrix} & \begin{matrix} u_{xa} & u_{ya} & \theta_a & u_{xb} & u_{yb} & \theta_b \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} Al^2/I & 0 & 0 & -Al^2/I & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -Al^2/I & 0 & 0 & Al^2/I & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} Q_{xa} \\ Q_{ya} \\ M_a \\ Q_{xb} \\ Q_{yb} \\ M_b \end{matrix} \end{matrix} \quad (12.67)$$

#### (2) 質量マトリックス

##### (a) ランプト・マス

要素の質量マトリックスは、式(12.4)・(12.40)から次式のように求まる。

$$[M] = \begin{matrix} & \begin{matrix} \ddot{u}_{xa} & \ddot{u}_{ya} & \ddot{\theta}_a & \ddot{u}_{xb} & \ddot{u}_{yb} & \ddot{\theta}_b \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} m/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} F_{xa} \\ F_{ya} \\ \bar{M}_a \\ F_{xb} \\ F_{yb} \\ \bar{M}_b \end{matrix} \end{matrix} \quad (12.68)$$

##### (b) コンシステント・マス

要素の質量マトリックスは、式(12.26)・(12.66)から次式のように求まる。

$$[M] = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{xa} & \ddot{u}_{ya} & \ddot{\theta}_a & \ddot{u}_{xb} & \ddot{u}_{yb} & \ddot{\theta}_b \\ 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xa} \\ F_{ya} \\ \bar{M}_a \\ F_{xb} \\ F_{yb} \\ \bar{M}_b \end{bmatrix} \quad (12.69)$$

## 第 13 章 座標変換

この章では、要素座標系で記述された要素の復元力と変位の関係および慣性力と加速度の関係を全体座標系に変換することを学ぶ。

### 13.1 座標系のルール

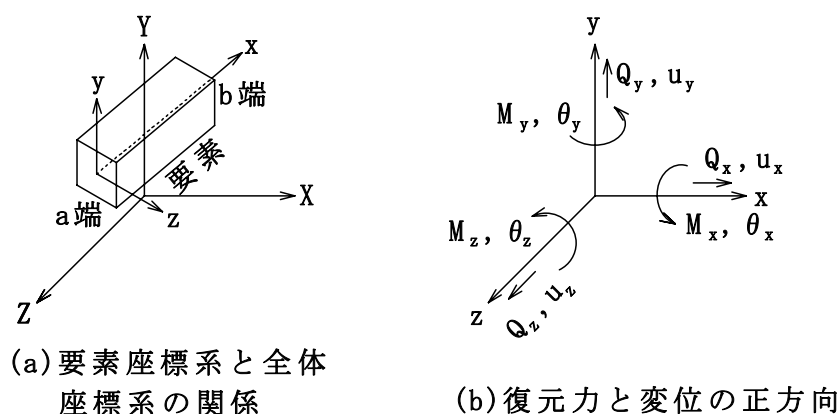


図 13.1 要素座標系と全体座標系および復元力と変位の正方向

第 12 章で述べたように、ある要素の**要素座標系**  $(x, y, z)$  (local coordinate) とは、その要素の  $a$  端を原点として、 $b$  端方向を  $x$  軸の正方向とした、その要素だけの座標系であり、要素ごとに座標軸がいろいろの方向を向いている。したがって、系の運動方程式を構築するためには、復元力や変位を共通の**全体座標系**  $(X, Y, Z)$  (global coordinate) に変換しなければならない。全体座標系では、一般に、“地盤に対して相対的に固定された点”を原点とする。

要素座標系と全体座標系の座標軸の正方向は、**右手系**に設定されるのが常識である。一般に提供されている構造解析プログラムを用いて 3 次元(立体)解析するとき、この常識と異なる座標系を設定すると、座標変換が正しく行われない場合があるので注意する必要がある。

この右手系は、別名**右ねじ系**ともよばれる。まず、座標軸の順番を  $X, Y, Z, X, Y, Z \dots$  とする。図 13.1(a)に示すように、最初の 2 つの  $X$  軸と  $Y$  軸の方向を適当に決める。順番が“前の  $X$  軸”を“後の  $Y$  軸”へ右ねじの回転方向に重ねたとき、右ねじが進む方向が“次の  $Z$  軸”の正方向である。 $X$  軸と  $Y$  軸

の正方向は、それぞれ $Y$ 軸を $Z$ 軸および $Z$ 軸を $X$ 軸に重ねた右ねじの進む方向で、最初に適当にきめた方向と一致する。要素座標系も同様である。復元力と変位は、図 13.1(b)に示すように、添字の座標の正方向と同じである。モーメントや角変位の正方向は、添字の座標の正方向に右ねじを進めたときの回転方向である。図は、要素座標系について示しているが、全体座標系も同様である。

この部で扱う 2次元座標系でも、モーメントや回転変位の正方向を定める必要がある。その場合、“2次元座標系は3次元座標系の $X-Y$ 平面である”と考えればよい。

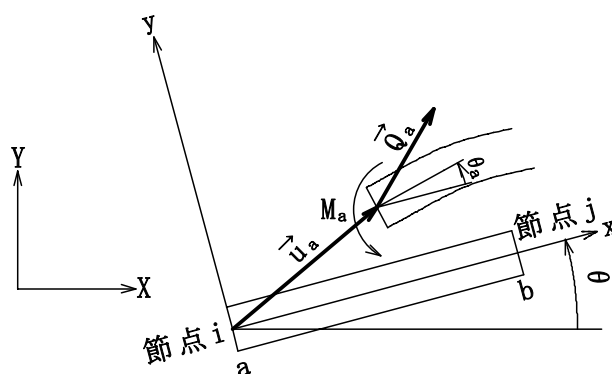
以上は、復元力と変位について述べたが、慣性力と加速度あるいは減衰力と速度についても同様である。

### 13.2 要素座標系から全体座標系への座標変換

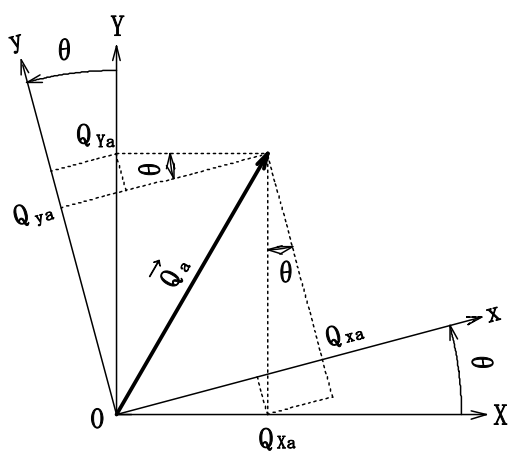
前に述べたように、系の運動方程式の構築とは、各節点における力のつり合い式に、復元力と変位の関係式・慣性力と加速度の関係式・減衰力と速度の関係式を代入して節点変位を変数とする連立微分方程式を作成することである。これらの力や変位などは元々要素座標系で書かれているので、共通の全体座標系に書き直さなければならない。このことを具体的に説明する。

図 13.2(a)は、節点の手前で切り出した、ある要素の変形前・変形後の状態と要素座標系・全体座標系の関係を示している。 $a$ 端と $b$ 端は、それぞれ節点 $i$ と節点 $j$ に接続する。全体座標系の $X$ 軸と要素座標系の $x$ 軸のなす角度 $\theta$ は、 $X$ 軸から $x$ 軸へ右ねじを回転させた角度を正とする(これは習慣的なもので、“ $x$ 軸から $X$ 軸へ”ではないことに注意)。

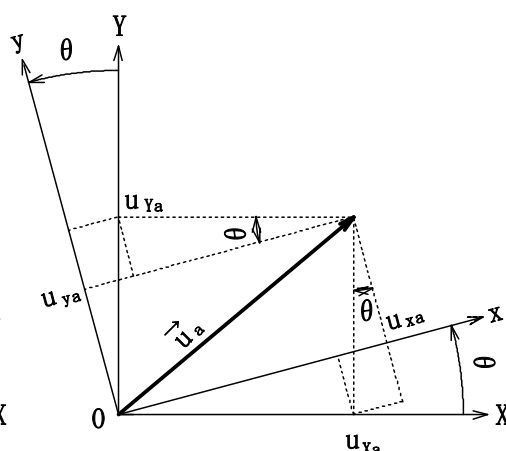
$a$ 端に着目する。復元力である $\overline{Q}_a$ と $M_a$ は、それぞれ $a$ 端に作用する力とモーメント、 $\overline{u}_a$ と $\theta_a$ は、それぞれ $a$ 端すなわち節点 $i$ の変位と角変位である。図 13.2(b)および(c)は、それぞれ $\overline{Q}_a$ および $\overline{u}_a$ と要素座標系・全体座標系の関係を示している。要素座標系の原点と全体座標系の原点が一致しているのは、ベクトルは、平行移動させてもかまわないからである。



(a) 復元力と変位



(b) 復元力



(c) 変位

図13.2 a端の復元力・変位と要素座標系・全体座標系の関係

ベクトル  $\overline{Q}_a$  と  $\overline{u}_a$  は、要素座標系および全体座標に対して、それぞれ数ベクトル

$$\{Q_a\}_{xy} = \begin{Bmatrix} Q_{xa} \\ Q_{ya} \\ M_a \end{Bmatrix}, \quad \{u_a\}_{xy} = \begin{Bmatrix} u_{xa} \\ u_{ya} \\ \theta_a \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow x \text{方向の成分} \\ \leftarrow y \text{方向の成分} \\ \leftarrow \text{モーメントあるいは角変位} \end{array} \quad (13.1)$$

$$\{Q_a\}_{XY} = \begin{Bmatrix} Q_{Xa} \\ Q_{Ya} \\ M_a \end{Bmatrix}, \quad \{u_a\}_{XY} = \begin{Bmatrix} u_{Xa} \\ u_{Ya} \\ \theta_a \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow X \text{方向の成分} \\ \leftarrow Y \text{方向の成分} \\ \leftarrow \text{モーメントあるいは角変位} \end{array} \quad (13.2)$$

で表すことができる。 $\{Q_a\}_{xy}$  と  $\{Q_a\}_{XY}$  の関係および  $\{u_a\}_{xy}$  と  $\{u_a\}_{XY}$  の関係は、8.5節で述べたように変換行列を用いて表わすことができる。すなわち



$$\{Q_a\}_{xy} = [T_a]\{Q_a\}_{XY} \quad (13.3)$$

$$\{u_a\}_{xy} = [T_a]\{u_a\}_{XY} \quad (13.4)$$

ここで、 $[T_a]$ は、 $XY$ 座標系から $xy$ 座標系への変換行列で、式(8.51)および“モーメントと角変位は座標変換しても変わらないこと”から

$$[T_a] = \begin{matrix} Q_{xa}, u_{xa} & Q_{ya}, u_{ya} & M_a, \theta_a \\ \left[ \begin{array}{ccc} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \begin{matrix} Q_{xa}, u_{xa} \\ Q_{ya}, u_{ya} \\ M_a, \theta_a \end{matrix} \end{matrix} \quad (13.5)$$

である。 $[T_a]$ が $XY$ 座標系から $xy$ 座標系への変換行列であるのは、習慣的なものである。

要素座標系で記述された復元力 $\{Q_a\}_{xy}$ を各節点における力のつり合い式に代入するために、全体座標系に書き直さなければならない。式(13.3)の両辺に左から $[T_a]$ の逆行列を乗じると

$$[T_a]^{-1}\{Q_a\}_{xy} = [T_a]^{-1}[T_a]\{Q_a\}_{XY}, \quad \therefore [T_a]^{-1}\{Q_a\}_{xy} = \{Q_a\}_{XY} \quad (13.6)$$

となる。 $[T_a]$ は直交行列であるから、 $[T_a]^{-1} = [T_a]^T$ である。ゆえに、式(13.6)は

$$\{Q_a\}_{XY} = [T_a]^T \{Q_a\}_{xy} \quad (13.7)$$

となる。 $[T_a]^{-1}$ を $[T_a]^T$ に交換した意義は、前者を求めることが大変なのに比べて、後者は簡単に求まることにある。

要素座標系で記述された復元力と変位の関係すなわち剛性方程式は

$$\{Q_a\}_{xy} = [K_a]_{xy} \{u_a\}_{xy} \quad (13.8)$$

$$[K_a]_{xy} = \frac{EI}{l^3} \begin{matrix} u_{xa} & u_{ya} & \theta_a \\ \left[ \begin{array}{ccc} Al^2/I & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 \end{array} \right] & \begin{matrix} Q_{xa} \\ Q_{ya} \\ M_a \end{matrix} \end{matrix} \quad \text{(式(12.67)より)} \quad (13.9)$$

である。この式の変位 $\{u_a\}_{xy}$ は節点 $i$ の変位であるとともに、その節点に接続す

るすべての要素の変位でもある。これも共通の座標系である全体座標系に書き直す必要がある。式(13.4)を(13.8)に代入すると

$$\{Q_a\}_{xy} = [K_a]_{xy} [T_a] \{u_a\}_{XY} \quad (13.10)$$

となる。この式を(13.7)に代入すると、全体座標系で記述された復元力と節点変位の関係を得る。すなわち

$$\{Q_a\}_{XY} = [T_a]^T [K_a]_{xy} [T_a] \{u_a\}_{XY} \quad (13.11)$$

$b$  端は上記の式で添字を  $a$  から  $b$  に変えただけである。 $a$  端と  $b$  端を含んだ要素全体についてまとめよう。復元力と変位を、それぞれ、要素座標系に対して

$$\{Q\}_{xy} = \begin{Bmatrix} Q_{xa} \\ Q_{ya} \\ M_a \\ Q_{xb} \\ Q_{yb} \\ M_b \end{Bmatrix}, \quad \{u\}_{xy} = \begin{Bmatrix} u_{xa} \leftarrow a \text{ 端の } x \text{ 方向の成分} \\ u_{ya} \leftarrow a \text{ 端の } y \text{ 方向の成分} \\ \theta_a \leftarrow a \text{ 端のモーメントあるいは角変位} \\ u_{xb} \leftarrow b \text{ 端の } x \text{ 方向の成分} \\ u_{yb} \leftarrow b \text{ 端の } y \text{ 方向の成分} \\ \theta_b \leftarrow b \text{ 端のモーメントあるいは角変位} \end{Bmatrix} \quad (13.12)$$

全体座標系に対して

$$\{Q\}_{XY} = \begin{Bmatrix} Q_{Xa} \\ Q_{Ya} \\ M_a \\ Q_{Xb} \\ Q_{Yb} \\ M_b \end{Bmatrix}, \quad \{u\}_{XY} = \begin{Bmatrix} u_{Xa} \leftarrow a \text{ 端の } X \text{ 方向の成分} \\ u_{Ya} \leftarrow a \text{ 端の } Y \text{ 方向の成分} \\ \theta_a \leftarrow a \text{ 端のモーメントあるいは角変位} \\ u_{Xb} \leftarrow b \text{ 端の } X \text{ 方向の成分} \\ u_{Yb} \leftarrow b \text{ 端の } Y \text{ 方向の成分} \\ \theta_b \leftarrow b \text{ 端のモーメントあるいは角変位} \end{Bmatrix} \quad (13.13)$$

のように数ベクトルで表わすことができる。なお、 $\{u\}_{XY}$  の  $a$  端と  $b$  端の変位は、それぞれ節点  $i$  と節点  $j$  の変位に等しい。

要素座標系で記述された要素の復元力と変位の関係は、

$$\{Q\}_{xy} = [K]_{xy} \{u\}_{xy} \quad (13.14)$$

である。ここで  $[K]_{xy}$  は、要素座標系の要素の剛性マトリックスで式(12.67)である。

復元力と変位の全体座標系から要素座標系への変換は

$$\{Q\}_{xy} = [T]\{Q\}_{XY} \quad (13.15)$$

$$\{u\}_{xy} = [T]\{u\}_{XY} \quad (13.16)$$

$$[T] = \begin{matrix} Q_{x_a, u_{x_a}} & Q_{y_a, u_{y_a}} & M_a, \theta_a & Q_{x_b, u_{x_b}} & Q_{y_b, u_{y_b}} & M_b, \theta_b \\ \left[ \begin{array}{cccccc} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} Q_{x_a, u_{x_a}} \\ Q_{y_a, u_{y_a}} \\ M_a, \theta_a \\ Q_{x_b, u_{x_b}} \\ Q_{y_b, u_{y_b}} \\ M_b, \theta_b \end{array} \end{matrix} \quad (13.17)$$

である。

全体座標系で記述された要素の復元力と節点変位の関係は

$$\{Q\}_{XY} = [K]_{XY} \{u\}_{XY} \quad (13.18)$$

$$[K]_{XY} = [T]^T [K]_{xy} [T] \quad (13.19)$$

である。したがって、 $[K]_{XY}$ が全体座標系の要素の剛性マトリックスである。

動的解析の手順は、①式(13.18)を各節点の力のつり合い式に代入することによって、節点変位を変数とした連立微分方程式を得る、②その方程式を解くことによって節点の変位 $\{u\}_{XY}$ を求める、③ $\{u\}_{XY}$ を式(13.16)に代入することによって $\{u\}_{xy}$ を求める、④ $\{u\}_{xy}$ を式(13.14)に代入することによって復元力 $\{Q\}_{xy}$ を求める、である。

慣性力と加速度の関係は、上記の復元力と変位の関係と同じであるから、全体座標系の要素の質量マトリックス $[M]_{XY}$ は

$$[M]_{XY} = [T]^T [M]_{xy} [T] \quad (13.20)$$

である。ここで、 $[M]_{xy}$ は要素座標系の要素の質量マトリックスである。

### 13.3 要約

全体座標系で記述された要素の復元力と節点変位および慣性力と節点加速度

を関係付ける剛性マトリックス $[K]_{XY}$ および質量マトリックス $[M]_{XY}$ は、それぞれ

$$[K]_{XY} = [T]^T [K]_{xy} [T], \quad [M]_{XY} = [T]^T [M]_{xy} [T]$$

である。ここで、 $[K]_{xy}$  および  $[M]_{xy}$  は、それぞれ要素座標系で表わした要素の剛性マトリックスおよび質量マトリックスである。 $[T]$  は、全体座標系から要素座標系への変換マトリックスである。

## 第 14 章 モード解析例

第 11 章・第 12 章・第 13 章で“平面骨組系のモード解析”を学んできた。この章では、平面骨組系を地震応答解析することによって、せん断建物モデルとの違いを実感しよう。解析条件は、地震の地盤加速度が、水平方向( $X$  方向)および鉛直方向( $Y$  方向)に加わるとする。それぞれの地盤加速度を  $\ddot{x}_g$  および  $\ddot{y}_g$  とする。その場合の運動方程式は、式(9.25)より

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} & \cdots \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} & \cdots \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} & \cdots \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} & \cdots \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} & \cdots \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{X1} \\ \ddot{u}_{Y1} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{u}_{X2} \\ \ddot{u}_{Y2} \\ \ddot{\theta}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & \cdots \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & \cdots \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & \cdots \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & \cdots \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} & \cdots \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_{X1} \\ \dot{u}_{Y1} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{u}_{X2} \\ \dot{u}_{Y2} \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & \cdots \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & \cdots \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & \cdots \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & \cdots \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & \cdots \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ \theta_1 \\ u_{X2} \\ u_{Y2} \\ \theta_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \\
 & = - \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} & \cdots \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} & \cdots \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} & \cdots \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} & \cdots \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} & \cdots \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \ddot{x}_g \text{ および } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \ddot{y}_g \quad (14.1)
 \end{aligned}$$

である。ここで、 $u_{Xs}$ 、 $u_{Ys}$  と  $\theta_s$  は、全体座標系における節点  $s$  の  $X$  方向変位、 $Y$  方向変位と角(回転)変位である。

### 14.1 下端固定の 1 本のビーム・カラムのモード解析

図 14.1 に示すように、橋梁の単柱式橋脚をモデル化した下端固定の 1 本のビーム・カラムを考える。座標系、要素の断面諸元、質量と材料定数は、図に示す。節点 1 には上部構造を想定した集中質量  $M$  があり、柱には分布した質量が存在する。節点 0 は、全自由度が拘束されているので、運動は節点 1 だけに

着目すればよい。したがって、解析モデルは、“拘束された節点 0”と“3 自由度の節点 1”と“要素 1”で構成される 3 自由度系である。

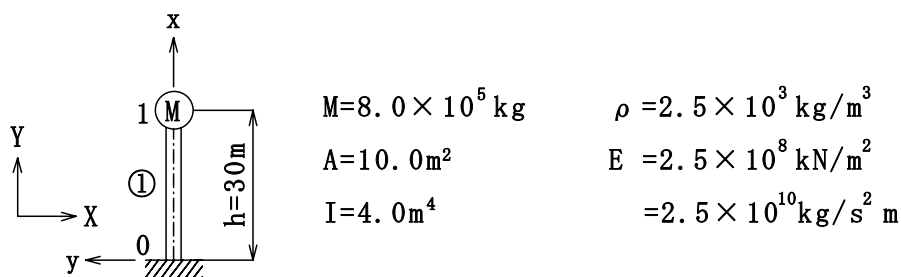


図 14.1 解析モデル 1

### (1) (要素座標系における)要素の剛性と質量マトリックス

要素 1 の a 端を節点 0 にとると、その節点の地盤に対する相対変位と相対加速度はすべて 0 であるので、要素 1 の剛性と質量マトリックスは、b 端に関する成分だけでマトリックスを作成すればよい。したがって、要素座標系における要素 1 の剛性マトリックス  ${}_1[K]_{xy}$  は、式(12.67)から

$${}_1[K]_{xy} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} Al^2/I & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6l \\ 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$= 10^7 \text{ kg/s}^2 \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} & \theta_1 \\ 833.3 & 0 & 0 \\ 0 & 4.444 & -66.67\text{m} \\ 0 & -66.67\text{m} & 1333\text{m}^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} Q_{x1} \\ Q_{y1} \\ M_1 \end{matrix} \quad (14.2)$$

となる。質量マトリックスとしてコンシステント・マスを用いると、要素座標系における要素 1 の  ${}_1[M]_{xy}$  は、式(12.69)で  $m = \rho Ah$  を代入した下式である。

$${}_1[M]_{xy} = \begin{bmatrix} \rho Ah/3 & 0 & 0 \\ 0 & 13\rho Ah/35 & -11\rho Ah^2/210 \\ 0 & -11\rho Ah^2/210 & \rho Ah^3/105 \end{bmatrix}$$

$$= \times 10^7 \text{ kg} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{x1} & \ddot{u}_{y1} & \ddot{\theta}_1 \\ 0.0250 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0279 & -0.1179\text{m} \\ 0 & -0.1179\text{m} & 0.6429\text{m}^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \bar{M}_1 \end{matrix} \quad (14.3)$$

## (2) (全体座標系における)系の剛性と質量マトリックス

変換行列は、式(13.17)に  $\theta = \pi/2$  を代入することによって求まる。

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) & 0 \\ -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.4)$$

“系の剛性マトリックス  $[K]$ ” は、要素数が 1 つであるので、全体座標系に変換された“要素 1 の剛性マトリックス  ${}_1[K]_{XY}$ ” と一致する。 $[K]$  は式(12.67)より下式となる。

$$\begin{aligned} [K] &= {}_1[K]_{XY} = [T]^T {}_1[K]_{xy} [T] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^7 \begin{bmatrix} 833.3 & 0 & 0 \\ 0 & 4.444 & -66.67 \\ 0 & -66.67 & 1333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 10^7 \text{ kg/s}^2 \begin{bmatrix} & u_{x1} & u_{y1} & \theta_1 \\ 4.444 & 0 & 66.67\text{m} & Q_{x1} \\ 0 & 833.3 & 0 & Q_{y1} \\ 66.67\text{m} & 0 & 1333\text{m}^2 & M_1 \end{bmatrix} \quad (14.5) \end{aligned}$$

全体座標系に変換された“要素 1 の質量マトリックス  ${}_1[M]_{XY}$ ” は、式(13.20)から

$$\begin{aligned} {}_1[M]_{XY} &= [T]^T [M]_{xy} [T] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^7 \begin{bmatrix} 0.0250 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0279 & -0.1179 \\ 0 & -0.1179 & 0.6429 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 10^7 \text{ kg} \begin{bmatrix} & \ddot{u}_{x1} & \ddot{u}_{y1} & \ddot{\theta}_1 \\ 0.0279 & 0 & 0.1179\text{m} & F_{x1} \\ 0 & 0.0250 & 0 & F_{y1} \\ 0.1179\text{m} & 0 & 0.6429\text{m}^2 & \bar{M}_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。さらに、上部構造の質量を追加すると、以下に示すように“系の質量マトリックス  $[M]$ ” が求まる。上部構造の質量は、 $X$  と  $Y$  の両方向に加えることに注意する。ここでは計算を簡単にするために、上部構造の慣性モーメントは無視する。

$$\begin{aligned}
 [M] &= 10^7 \text{ kg} \begin{bmatrix} 0.0279+0.08 & 0 & 0.1179\text{m} \\ 0 & 0.0250+0.08 & 0 \\ 0.1179\text{m} & 0 & 0.6429\text{m}^2 \end{bmatrix} \\
 &= 10^7 \text{ kg} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{x1} & \ddot{u}_{y1} & \ddot{\theta}_1 \\ 0.1079 & 0 & 0.1179\text{m} \\ 0 & 0.1050 & 0 \\ 0.1179\text{m} & 0 & 0.6429\text{m}^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \bar{M}_1 \end{matrix} \quad (14.6)
 \end{aligned}$$

### (3) 固有値解析

固有円振動数を決定する特性方程式は、式(10.8)から

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (14.7)$$

である。この式に、(14.5)と(14.6)を代入すると

$$\begin{aligned}
 10^7 \begin{vmatrix} 4.444 - 0.1079\omega^2 & 0 & 66.67 - 0.1179\omega^2 \\ 0 & 833.3 - 0.105\omega^2 & 0 \\ 66.67 - 0.1179\omega^2 & 0 & 1333 - 0.6429\omega^2 \end{vmatrix} &= 0 \\
 \therefore \begin{vmatrix} 4.444 - 0.1079\omega^2 & 66.67 - 0.1179\omega^2 \\ 66.67 - 0.1179\omega^2 & 1333 - 0.6429\omega^2 \end{vmatrix} (833.3 - 0.105\omega^2) &= 0
 \end{aligned}$$

となる。この式を分離すると

$$\begin{vmatrix} 4.444 - 0.1079\omega^2 & 66.67 - 0.1179\omega^2 \\ 66.67 - 0.1179\omega^2 & 1333 - 0.6429\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (14.8)$$

および

$$833.3 - 0.105\omega^2 = 0 \quad (14.9)$$

である。

式(14.8)を展開すると

$$0.05547\omega^4 - 131.0\omega^2 + 1479 = 0$$

となる。これを解くと、1モードと2次モードの固有円振動数

$$\omega_1 = 3.368\text{rad/s}, \quad \omega_2 = 48.48\text{rad/s} \quad (14.10)$$

が求まる。式(14.9)を解くと、3次モードの固有円振動数

$$\omega_3 = 89.09\text{rad/s} \quad (14.11)$$

が求まる。したがって、固有振動数  $f (= \omega / 2\pi)$  は以下のとおりである。

$$f_1 = 0.5360\text{Hz}, \quad f_2 = 7.716\text{Hz}, \quad f_3 = 14.18\text{Hz}$$



モードベクトル  $\{a\}$  は、式(10.6)に固有円振動数を代入することによって得られる。すなわち

$$10^7 \begin{bmatrix} 4.444 - 0.1079\omega^2 & 0 & 66.67 - 0.1179\omega^2 \\ 0 & 833.3 - 0.105\omega^2 & 0 \\ 66.67 - 0.1179\omega^2 & 0 & 1333 - 0.6429\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = 0$$

である。この式は以下のように分離できる。

$$\begin{bmatrix} 4.444 - 0.1079\omega^2 & 66.67 - 0.1179\omega^2 \\ 66.67 - 0.1179\omega^2 & 1333 - 0.6429\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (14.12)$$

および

$$(833.3 - 0.105\omega^2)a_2 = 0 \quad (14.13)$$

$\omega_1 = 3.368\text{rad/s}$  は、同次連立 1 次方程式(14.12)の係数行列の行列式を 0 にするので、式(14.12)の 2 つの方程式は同じである。第 1 式を用いると

$$\frac{a_3}{a_1} = -\frac{4.444 - 0.1079\omega_1^2}{66.67 - 0.1179\omega_1^2} = -0.04929\text{m}^{-1}$$

である。式(14.13)に  $\omega_1 = 3.368\text{rad/s}$  を代入すると

$$(833.3 - 0.105\omega_1^2) = 832.1a_2 = 0$$

$$\therefore a_2 = 0$$

となる。したがって、1 次のモードベクトルと一般化質量は、 $a_{11} = 1$  とすると、それぞれ以下のとおりである。

$$\{a\}_1 = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.4929\text{m}^{-1} \end{Bmatrix} \quad (14.14)$$

$$\begin{aligned} \{a\}_1^T [M] \{a\}_1 &= \{1 \quad 0 \quad -0.04929\} \begin{bmatrix} 0.1079 & 0 & 0.1179 \\ 0 & 0.105 & 0 \\ 0.1179 & 0 & 0.6429 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.04929 \end{Bmatrix} \times 10^7 \\ &= 9.784 \times 10^5 \text{kg} \end{aligned}$$

正規化するための係数は、式(10.31)から

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\{a\}_1^T [M] \{a\}_1}} = \frac{1}{\sqrt{9.784 \times 10^5}} = 1.011 \times 10^{-3} \text{kg}^{-1/2}$$

である。したがって、正規化した 1 次モードベクトルは

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \mu \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.011 \times 10^{-3} \text{ kg}^{-1/2} \\ 0 \\ -4.983 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1} \text{ kg}^{-1/2} \end{Bmatrix} \quad (14.15)$$

である。この 1 次基準振動は、軸方向の伸縮を伴わない“はり(ビーム)”としての振動である。

同様に、 $\omega_2 = 48.48 \text{ rad/s}$  を代入すると

$$\frac{a_3}{a_1} = -\frac{4.444 - 0.1079\omega_1^2}{66.67 - 0.1179\omega_1^2} = -1.184 \text{ m}^{-1}$$

$$a_2 = 0$$

であるから、2 次のモードベクトルと一般化質量は、 $a_{12} = 1$  とすると、それぞれ

$$\{a\}_2 = \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1.184 \text{ m}^{-1} \end{Bmatrix} \quad (14.16)$$

$$\begin{aligned} \{a\}_2^T [M] \{a\}_2 &= \{1 \quad 0 \quad -0.184\} \begin{bmatrix} 0.1079 & 0 & 0.1179 \\ 0 & 0.105 & 0 \\ 0.1179 & 0 & 0.6429 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1.184 \end{Bmatrix} \times 10^7 \\ &= 7.300 \times 10^6 \text{ kg} \end{aligned}$$

である。

正規化するための係数は

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\{a\}_2^T [M] \{a\}_2}} = \frac{1}{\sqrt{7.300 \times 10^6}} = 3.701 \times 10^{-4} \text{ kg}^{-1/2}$$

である。したがって、正規化した 2 次モードベクトルは

$$\{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{Bmatrix} = \mu \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.701 \times 10^{-4} \text{ kg}^{-1/2} \\ 0 \\ -4.382 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1} \text{ kg}^{-1/2} \end{Bmatrix} \quad (14.17)$$

である。この 2 次基準振動も“はり(ビーム)”としての振動である。

$\omega_3 = 89.09 \text{ rad/s}$  は、式(14.12)の係数行列の行列式

$$\begin{vmatrix} 4.444 - 0.1079\omega^2 & 66.67 - 0.1179\omega_3^2 \\ 66.67 - 0.1179\omega^2 & 1333 - 0.6429\omega_3^2 \end{vmatrix} = 2.925 \times 10^6 \neq 0$$

が 0 とならないので、式(14.12)の解は自明の解  $a_1 = a_3 = 0$  だけしか存在しない。  
また、式(14.13)は、 $0 \cdot a_2 = 0$  であるので、 $a_2$  は任意の値をとれる。 $a_2 = 1$  とすれば、3 次のモードベクトルと一般化質量は、それぞれ

$$\{a\}_3 = \begin{Bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14.18)$$

$$\begin{aligned} \{a\}_3^T [M] \{a\}_3 &= \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1079 & 0 & 0.1179 \\ 0 & 0.105 & 0 \\ 0.1179 & 0 & 0.6429 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^7 \\ &= 1.050 \times 10^6 \text{ kg} \end{aligned}$$

である。

正規化するための係数は

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\{a\}_3^T [M] \{a\}_3}} = \frac{1}{\sqrt{1.050 \times 10^6}} = 9.759 \times 10^{-4} \text{ kg}^{-1/2}$$

である。したがって、正規化した 3 次モードベクトルは

$$\{\phi\}_3 = \begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \mu \begin{Bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 9.759 \times 10^{-4} \text{ kg}^{-1/2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14.19)$$

である。この 3 次基準振動は、曲げ変形を伴わない軸方向だけに伸縮する“柱(カラム)”としての振動である。

したがって、正規化したモードマトリックスは

$$[\Phi] = 10^{-4} \text{ kg}^{-1/2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 10.11 & 3.701 & 0 \\ 0 & 0 & 9.759 \\ -0.4983\text{m}^{-1} & -4.382\text{m}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \quad (14.20)$$

である。ここで、 $(u_1, u_2, u_3)$  および  $(u_{x1}, u_{y1}, \theta_1)$  は、それぞれ(1 次, 2 次, 3 次)の基準座標)および(節点 1 の X 方向, Y 方向, 回転の変位)である。式(14.20)からわかるように、1 次基準振動と 2 次基準振動では、X 方向の変位と回転が生じるが、Y 方向の変位は生じない。X 方向の変位に対して回転変位が、1 次基準振動では小さく、2 次基準振動では大きい。3 次基準振動では、Y 方向の

変位だけが生じる。

#### (4) 刺激係数

$X$  方向および  $Y$  方向の地盤動に対する正規化した 1 次モードの刺激係数は、式(10.41)から

$$\beta_1 = \{\phi\}_1^T [M] \{1\} = 10^{-4} \{10.11 \quad 0 \quad -0.4983 \times 10\} \begin{bmatrix} 0.1079 & 0 & 0.1179 \\ 0 & 0.105 & 0 \\ 0.1179 & 0 & 0.6429 \end{bmatrix} \\ \times 10^7 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ および } \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 1.032 \times 10^3 \text{ kg}^{1/2} \text{ および } 0 \quad (14.21)$$

である。2 次モードの刺激係数は

$$\beta_2 = \{\phi\}_2^T [M] \{1\} = 10^{-4} \{3.701 \quad 0 \quad -4.382\} \begin{bmatrix} 0.1079 & 0 & 0.1179 \\ 0 & 0.105 & 0 \\ 0.1179 & 0 & 0.6429 \end{bmatrix} \\ \times 10^7 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ および } \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = -1.173 \times 10^2 \text{ kg}^{1/2} \text{ および } 0 \quad (14.22)$$

である。3 次モードの刺激係数は

$$\beta_3 = \{\phi\}_3^T [M] \{1\} = 10^{-4} \{0 \quad 9.759 \quad 0\} \begin{bmatrix} 0.1079 & 0 & 0.1179 \\ 0 & 0.105 & 0 \\ 0.1179 & 0 & 0.6429 \end{bmatrix} \\ \times 10^7 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ および } \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \text{ および } 1.026 \times 10^3 \text{ kg}^{1/2} \quad (14.23)$$

である。

刺激係数をまとめると

|             | $X$ 方向地盤動                            | $Y$ 方向地盤動 |
|-------------|--------------------------------------|-----------|
| 1 次モードの刺激係数 | $1.032 \times 10^3 \text{ kg}^{1/2}$ | 0         |

$$2 \text{ 次モードの刺激係数} \quad -1.173 \times 10^2 \text{ kg}^{1/2} \quad 0$$

$$3 \text{ 次モードの刺激係数} \quad 0 \quad 1.026 \times 10^3 \text{ kg}^{1/2}$$

である。これからわかるように、 $X$  方向の地盤動  $\ddot{x}_g$  に対して、3 次基準振動は生じない。 $-\beta_i \ddot{x}_g$  は、見かけ上の外力と考えることができるから、2 次モード振動系に比べて 1 モード振動系に加わる地震力は約 10 倍であることがわかる。 $Y$  方向の地盤動  $\ddot{y}_g$  に対しては、3 次基準振動だけが生じることがわかる。これは直感的にわかることである。

### (5) 地震応答の解

正規化された基準座標に対する運動方程式は、一般化減衰定数  $h_i^* = 0.05 (i=1,2,3)$  とすると、式(11.34)より

$$\ddot{u}_i + 2h_i^* \omega_i \dot{u}_i + \omega_i^2 u_i = -\beta_i \ddot{x}_g \text{ および } -\beta_i \ddot{y}_g \quad (i=1,2,3)$$

である。

$X$  方向地盤動に対する 1 次モード振動系の運動方程式は

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + 2 \times 0.05 \times 3.368 \dot{u}_1 + 3.368^2 u_1 &= -1.032 \times 10^3 \ddot{x}_g \\ \therefore \ddot{u}_1 + 0.3368 \dot{u}_1 + 11.34 u_1 &= -1.032 \times 10^3 \ddot{x}_g \end{aligned} \quad (14.24)$$

である。2 次モード振動系の運動方程式は

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2 + 2 \times 0.05 \times 48.48 \dot{u}_2 + 48.48^2 u_2 &= 1.173 \times 10^2 \ddot{x}_g \\ \therefore \ddot{u}_2 + 4.848 \dot{u}_2 + 2350 u_2 &= 1.173 \times 10^3 \ddot{x}_g \end{aligned} \quad (14.25)$$

である。3 次基準振動は生じない。

$Y$  方向地盤動に対する 3 次モード振動系の運動方程式は

$$\begin{aligned} \ddot{u}_3 + 2 \times 0.05 \times 89.09 \dot{u}_3 + 89.09^2 u_3 &= -1.026 \times 10^3 \ddot{y}_g \\ \therefore \ddot{u}_3 + 8.909 \dot{u}_3 + 7937 u_3 &= -1.032 \times 10^3 \ddot{y}_g \end{aligned} \quad (14.26)$$

である。1 次と 2 次基準振動は生じない。

最終目的である節点 1 の変位の解  $u_{x1}$ ,  $u_{y1}$  と  $\theta_1$  は、上記の連成しない方程式の解  $u_1$ ,  $u_2$  と  $u_3$  を変換式に代入した

$$\begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$= 10^{-4} \text{kg}^{-1/2} \begin{bmatrix} 10.11 & 3.701 & 0 \\ 0 & 0 & 9.759 \\ -0.4983\text{m}^{-1} & -4.382\text{m}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (14.27)$$

である。

## 14.2 平面骨組系のモード解析

図 14.2 に示すように、節点 1 で剛結された 2 つのビーム・コラムが壁面に固定されている。座標系、要素の断面諸元、質量と断面定数は、図に示されている。質量  $M$  は節点 1 だけに集中的に存在し、慣性モーメントは無視する。節点 2 と節点 3 は、全自由度が拘束されているので、運動は節点 1 だけに着目すればよい。したがって、解析モデルは、“拘束された節点 2 と節点 3”，“3 自由度の節点 1” および “要素 1 と要素 2” で構成される 3 自由度系である。

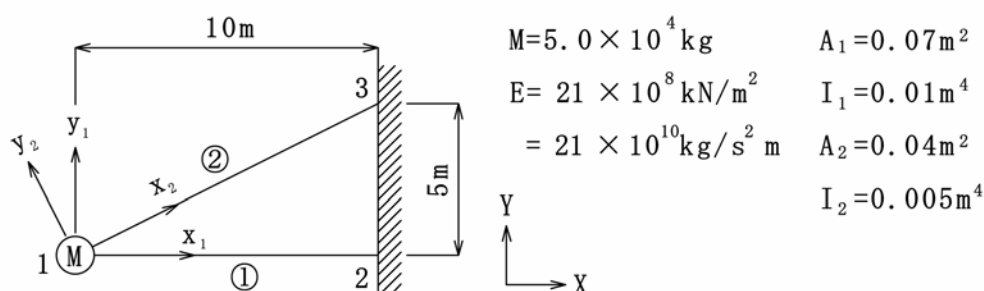


図 14.2 解析モデル 2

### (1) 剛性と質量マトリックス

要素 1 の  $a$  端を節点 1 とすると、要素座標系と全体座標系が一致するので、要素座標系の剛性マトリックス  ${}_1[K]_{xy}$  と全体座標系の剛性マトリックス  ${}_1[K]_{XY}$  は一致し、それは式(12.67)の  $a$  端の剛性マトリックスである。すなわち

$${}_1[K]_{XY} = {}_1[K]_{xy} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} Al^2/I & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$= 10^7 \text{ kg/s}^2 \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} & \theta_1 \\ 147.0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.52 & 12.6\text{m} \\ 0 & 12.6\text{m} & 84.0\text{m}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{x1} \\ Q_{y1} \\ M_1 \end{bmatrix} \quad (14.28)$$

要素 2 の  $a$  端を節点 1 とすると, 要素座標系に対する剛性マトリックス  ${}_2[K]_{xy}$  は, 式(12.67)の  $a$  端(節点 1)の剛性マトリックスである。すなわち

$${}_2[K]_{xy} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} Al^2/I & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$= 10^7 \text{ kg/s}^2 \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} & \theta_1 \\ 75.132 & 0 & 0 \\ 0 & 0.90158 & 5.04\text{m} \\ 0 & 5.04\text{m} & 37.566\text{m}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{x1} \\ Q_{y1} \\ M_1 \end{bmatrix} \quad (14.29)$$

である。これを全体座標系に変換する変換行列は, 式(13.17)の  $a$  端に  $\theta = \tan^{-1}(5/10) = 0.4636\text{rad}$  を代入することによって以下のように求まる。

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8944 & 0.4472 & 0 \\ -0.4472 & 0.8944 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.30)$$

全体座標系に対する要素 2 の剛性マトリックス  ${}_2[K]_{XY}$  は, 式(13.19)より

$${}_2[K]_{XY} = [T]^T {}_2[K]_{xy} [T] = \begin{bmatrix} 0.8944 & -0.4472 & 0 \\ 0.4472 & 0.8944 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times 10^7 \begin{bmatrix} 75.132 & 0 & 0 \\ 0 & 0.90158 & 5.04 \\ 0 & 5.04 & 37.566 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8944 & 0.4472 & 0 \\ -0.4472 & 0.8944 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 10^7 \text{ kg/s}^2 \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} & \theta_1 \\ 60.286 & 29.692 & -2.254\text{m} \\ 29.692 & 15.748 & 4.5079 \\ -2.254\text{m} & 4.5079\text{m} & 37.566\text{m}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{x1} \\ Q_{y1} \\ M_1 \end{bmatrix} \quad (14.31)$$

したがって、系の剛性マトリックス $[K]$ は、下記のとおりである。

$$\begin{aligned}
 [K] &= {}_1[K]_{XY} + {}_2[K]_{XY} \\
 &= 10^7 \text{ kg/s}^2 \begin{matrix} & u_{x1} & u_{y1} & \theta_1 \\ \begin{bmatrix} 207.286 & 29.692 & -2.254\text{m} \\ 29.692 & 18.268 & 17.1079\text{m} \\ -2.254\text{m} & 7.1079\text{m} & 121.566\text{m}^2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} Q_{x1} \\ Q_{y1} \\ M_1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (14.32)
 \end{aligned}$$

質量は集中質量だけであるので、全体座標系の質量マトリックス $[M]$ は

$$[M] = 10^4 \text{ kg} \begin{matrix} & \ddot{u}_{x1} & \ddot{u}_{y1} & \ddot{\theta}_1 \\ \begin{bmatrix} 5.0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \bar{M}_1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (14.33)$$

である。

## (2) 固有値解析

固有振動数を決定する特性方程式は

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (14.34)$$

である。この式に、(14.32)と(14.33)を代入すると次式を得る。

$$10^7 \begin{vmatrix} 207.286 - 0.005\omega^2 & 29.692 & -2.254 \\ 29.692 & 18.268 - 0.005\omega^2 & 17.1079 \\ -2.254 & 7.1079 & 121.566 \end{vmatrix} = 0 \quad (14.35)$$

この式は、 $\omega^2$ について2次方程式であるので、解は2つ( $\omega > 0$ )すなわちモード数は2つである。これは式(14.34)からわかるように、慣性モーメントを無視しているからである。解は

$$\omega_1 = 47.47 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 205.8 \text{ rad/s} \quad \text{である。} \quad (14.36)$$

である。したがって、固有振動数 $f (= \omega / 2\pi)$ は以下のとおりである。

$$f_1 = 7.554 \text{ Hz}, \quad f_2 = 32.76 \text{ Hz}$$

モードベクトル $\{a\}$ は、以下に示すように、式(10.6)に固有円振動数を代入することによって得られる。

$$10^7 \begin{bmatrix} 207.286 - 0.005\omega^2 & 29.692 & -2.254 \\ 29.692 & 18.268 - 0.005\omega^2 & 17.1079 \\ -2.254 & 7.1079 & 121.566 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (14.37)$$



式(14.37)は、係数行列が 0 の同次連立 1 次方程式であるから、独立な方程式は 2 個である。したがって、式(14.37)の 3 個の方程式から任意の 2 個を取り出して、それらに  $\omega_1 = 47.47\text{rad/s}$  を代入して解くことによって、1 次モードベクトルの成分  $a_{11}, a_{21}, a_{31}$  が求まる。最大成分を 1 とすると

$$\{a\}_1 = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.1531 \\ 1 \\ -0.1436\text{m}^{-1} \end{Bmatrix} \quad (14.38)$$

となる。また、一般化質量は

$$\begin{aligned} \{a\}_1^T [M] \{a\}_1 &= \{-0.1531 \quad 1 \quad -0.1436\} \\ &\times \begin{bmatrix} 5.0 & 0 & 0. \\ 0 & 5.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.1531 \\ 1 \\ -0.1436 \end{Bmatrix} \times 10^4 = 5.117 \times 10^4 \text{kg} \end{aligned}$$

である。正規化するための係数は、式(10.31)から

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\{a\}_1^T [M] \{a\}_1}} = \frac{1}{\sqrt{5.117 \times 10^4}} = 4.421 \times 10^{-3} \text{kg}^{-1/2}$$

となる。したがって、正規化したモードベクトルは次式となる。

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \mu \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.769 \times 10^{-4} \text{kg}^{-1/2} \\ 4.421 \times 10^{-3} \text{kg}^{-1/2} \\ -6.349 \times 10^{-4} \text{m}^{-1} \text{kg}^{-1/2} \end{Bmatrix} \quad (14.39)$$

2 次モードベクトルは、同様に、式(14.37)の 2 個の方程式に  $\omega_2 = 205.8\text{rad/s}$  を代入して解くことによって求まる。最大成分を 1 とすると

$$\{a\}_2 = \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.1531 \\ -0.003008\text{m}^{-1} \end{Bmatrix} \quad (14.40)$$

となる。また、一般化質量は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \{a\}_2^T [M] \{a\}_2 &= \{1 \quad 0.1531 \quad -0.003008\} \\ &\times \begin{bmatrix} 5.0 & 0 & 0. \\ 0 & 5.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.1531 \\ -0.003008 \end{Bmatrix} \times 10^4 = 5.117 \times 10^4 \text{kg} \end{aligned}$$

正規化するための係数は、式(10.31)から

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\{a\}_2^T [M] \{a\}_2}} = \frac{1}{\sqrt{5.117 \times 10^4}} = 4.421 \times 10^{-3} \text{ kg}^{-1/2}$$

である。したがって、正規化したモードベクトルは次式となる。

$$\{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{Bmatrix} = \mu \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.421 \times 10^{-3} \text{ kg}^{-1/2} \\ 6.769 \times 10^{-4} \text{ kg}^{-1/2} \\ -1.330 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1} \text{ kg}^{-1/2} \end{Bmatrix} \quad (14.41)$$

“2次モードまでしか存在しない”と前記したが、“系の自由度の数だけモード数は存在する”あるいは“モードマトリックスは正方行列である”という考え方に立つと、“3次基準振動は生じない”すなわち“3次モードベクトルの成分  $\phi_{13} = \phi_{23} = \phi_{33} = 0$  である”ことになる。その場合、正規化したモードマトリックスは

$$[\Phi] = 10^{-4} \text{ kg}^{-1/2} \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -6.769 \text{ kg}^{-1/2} & 44.21 \text{ kg}^{-1/2} & 0 \\ 44.21 \text{ kg}^{-1/2} & 6.769 \text{ kg}^{-1/2} & 0 \\ -6.349 \text{ m}^{-1} \text{ kg}^{-1/2} & -0.1330 \text{ m}^{-1} \text{ kg}^{-1/2} & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u_{1X} \\ u_{1Y} \\ \theta_1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (14.42)$$

である。式(14.42)からわかるように、1次基準振動は、Y方向の変位と回転が大きい振動である。2次基準振動は、X方向の変位だけが大きい振動である。

### (3) 刺激係数

X方向およびY方向の地盤動に対する正規化した1次モードの刺激係数は、式(10.41)から以下のとおりである。

$$\beta_1 = \{\phi\}_1^T [M] \{1\} = 10^{-4} \begin{Bmatrix} -6.769 & 44.21 & -6.349 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 5.0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14.43)$$

$$\times 10^4 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ および } \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = -33.85 \text{ kg}^{1/2} \text{ および } 221.0 \text{ kg}^{1/2}$$

2次モードの刺激係数は下式である。

$$\beta_2 = \{\phi\}_2^T [M] \{1\} = 10^{-4} \{44.21 \quad 6.769 \quad -0.1330\} \begin{bmatrix} 5.0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14.44)$$

$$\times 10^4 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ および } \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 221.0\text{kg}^{1/2} \text{ および } 33.85\text{kg}^{1/2}$$

刺激係数をまとめると下記のようなになる。

|             | X 方向地盤動                 | Y 方向地盤動                |
|-------------|-------------------------|------------------------|
| 1 次モードの刺激係数 | $-33.85\text{kg}^{1/2}$ | $221.0\text{kg}^{1/2}$ |
| 2 次モードの刺激係数 | $221.0\text{kg}^{1/2}$  | $33.85\text{kg}^{1/2}$ |

これからわかるように、X 方向および Y 方向の地盤動に対して、それぞれ主に 2 次基準振動および 1 次基準振動が生じる。

#### (4) 地震応答の解

地盤動に対する正規化された運動方程式は、 $h_i = 0.05 (i=1,2)$  とすると、式 (11.34) より次式である

$$\ddot{u}_i + 2h_i^* \omega_i \dot{u}_i + \omega_i^2 u_i = -\beta_i \ddot{x}_g \text{ および } -\beta_i \ddot{y}_g \quad (i=1,2)$$

X 方向の地盤動に対する 1 次モード振動系の運動方程式は

$$\ddot{u}_1 + 2 \times 0.05 \times 47.47 \dot{u}_1 + 47.47^2 u_1 = 33.85 \ddot{x}_g$$

$$\therefore \ddot{u}_1 + 4.747 \dot{u}_1 + 2253 u_1 = 33.85 \ddot{x}_g \quad (14.45)$$

である。2 次モード振動系の運動方程式は下式である。

$$\ddot{u}_2 + 2 \times 0.05 \times 205.8 \dot{u}_2 + 205.8^2 u_2 = -221.0 \ddot{x}_g$$

$$\therefore \ddot{u}_2 + 20.58 \dot{u}_2 + 42350 u_2 = -221.0 \times 10^3 \ddot{x}_g \quad (14.46)$$

Y 方向の地盤動に対する 1 次モード振動系の運動方程式は

$$\ddot{u}_1 + 2 \times 0.05 \times 47.47 \dot{u}_1 + 47.47^2 u_1 = -221.0 \ddot{y}_g$$

$$\therefore \ddot{u}_1 + 4.747 \dot{u}_1 + 2253 u_1 = -221.0 \ddot{y}_g \quad (14.47)$$

である。2 次モード振動系の運動方程式は下式である。

$$\ddot{u}_2 + 2 \times 0.05 \times 205.8 \dot{u}_2 + 205.8^2 u_2 = -33.85 \ddot{y}_g$$

$$\therefore \ddot{u}_2 + 20.58 \dot{u}_2 + 42350 u_2 = -33.85 \ddot{y}_g \quad (14.48)$$

最終目的である節点 1 の変位の解  $u_{x1}$ 、 $u_{y1}$  と  $\theta_1$  は、 $u_3 (= 0)$  を無視して、上記の連成しない方程式の解  $u_1$  と  $u_2$  を変換式に代入した次式である。

$$\begin{Bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \\ \phi_{31} & \phi_{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 10^{-4} \text{kg}^{-1/2} \begin{bmatrix} -6.769 & 44.42 \\ 44.42 & 6.769 \\ -6.349\text{m}^{-1} & -0.1330\text{m}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (14.49)$$

### 第 3-4 部の参考文献

- [3-4.1] Mario Paz, (1997), “Structural Dynamics”, Chapman & Hall.
- [3-4.2] 柴田明德, (2000), “最新耐震構造解析”, 森北出版株式会社。
- [3-4.3] 薩摩順吉・四ツ谷晶二, (2000), “キーポイント線形代数”, 岩波書店。
- [3-4.4] 戸田盛和・浅野功義, (2000), “行列と 1 次変換”, 岩波書店。
- [3-4.5] 河島佑男, (1972), “動的応答解析”, 培風館。

## 第 4 部 数値計算と非線形解析

いままでは、“減衰力と復元力がそれぞれ速度と変位に比例する”と仮定してきた。その場合、多自由度系の運動方程式は、線形な連立微分方程式となり、厳密解(デュアメル積分)を求めることが可能である。しかし、計算機の発達した現在は、そのような方法が用いられることはまれであり、**数値計算法**の一種である**逐次近似法**によって、初期状態から等時間間隔で順次に近似解を求めていく方法が一般的である。

大地震のような大きな力が作用すると、復元力は変位に比例せず、変位の履歴に依存するようになる。その運動方程式は非線形な連立微分方程式となり、もはや厳密解を求めることは困難となり、逐次近似法によって近似解を求めることになる。第 15 章では逐次近似法を説明し、第 16 章ではそれを用いた“非線形解析の概念”について述べる。

### 第 15 章 振動学と“数値計算”

この章では、線形な 1 自由度系を用いて、逐次近似法の一つであり、振動学で**加速度法**よばれる方法について説明するとともに、その数学的意味を述べる。さらに、各種の加速度法を統合した**ニューマーク β 法**も説明する。

#### 15.1 加速度法の数値計算の手順

線形な 1 自由度系の減衰強制振動の運動方程式は、式(3.9)より

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (t \geq 0) \quad (15.1)$$

である。初期条件すなわち“時刻  $t=0$  ( $\equiv t_0$ ) における変位と速度”

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (15.2)$$

を与え、任意の時刻  $t$  の変位、速度と加速度を求める問題を考える。このように、初期条件を与えて微分方程式を解く問題を**初期値問題**という。この問題を逐次近似法によって解く手順を述べる。

まず、時刻  $t_0$  における加速度  $\ddot{x}_0$  を求める。そのためには、式(15.2)を(15.1)に代入すればよい。 $f_0 = f(0)$  とおくと

$$\ddot{x}_0 = \ddot{x}(0) = \frac{1}{m} \{f_0 - c\dot{x}_0 - kx_0\} \quad (15.3)$$

となる。これで、時刻  $t_0$  における変位  $x_0$ 、速度  $\dot{x}_0$  と加速度  $\ddot{x}_0$  の値が定まったわけである。

微小時間を  $\Delta t$  とする。時刻  $t_i (= i\Delta t)$  の振動状態(変位  $x_i$ 、速度  $\dot{x}_i$ 、加速度  $\ddot{x}_i$ ) から、 $\Delta t$  時間後の  $t_{i+1}$  の振動状態を求めることができれば、 $t_0$  の振動状態がわかっているのだから、 $t_1, t_2, \dots$  に対する振動状態の近似解を 1 ステップずつ求めることができる。すなわち  $(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0) \rightarrow (x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1) \rightarrow \dots$  と順次に求めていくことができる。これが**逐次近似法**である。

$t_i$  の振動状態から  $t_{i+1}$  の振動状態を求めるためには、仮定が必要である。**加速度法**(acceleration method)とは、“ $t_i$  と  $t_{i+1}$  間の加速度の変化の仕方を仮定する逐次近似法”である。代表的な方法として、**線形加速度法**(linear acceleration method)と**平均加速度法**(average acceleration method)がある。

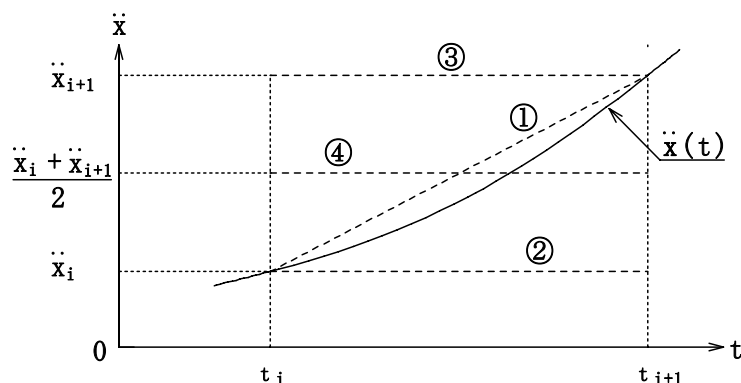


図 15.1 加速度法の仮定

### (1) 線形加速度法

この方法は、図 15.1 の線分①に示すように、時間区分  $t_i < t < t_{i+1}$  において、加速度  $\ddot{x}(t)$  が線形に変化すると仮定する。すなわち

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_i + \frac{\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i}{\Delta t} (t - t_i) \quad (15.4)$$

である。速度と変位は、式(15.4)を積分することによって求まる。

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_i + \int_{t_i}^t \ddot{x}(t) dt = \dot{x}_i + \ddot{x}_i (t - t_i) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i}{\Delta t} (t - t_i)^2 \quad (15.5)$$

$$x(t) = x_i + \int_{t_i}^t \dot{x}(t) dt = x_i + \dot{x}_i(t-t_i) + \frac{1}{2} \ddot{x}_i(t-t_i)^2 + \frac{1}{6} \frac{\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i}{\Delta t} (t-t_i)^3 \quad (15.6)$$

式(15.5)・(15.6)に  $t = t_{i+1} (= t_i + \Delta t)$  を代入すると

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \ddot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2} (\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i) \Delta t \quad (15.7)$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} (\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i) \Delta t^2 \quad (15.8)$$

となる。 $t = t_{i+1}$  で式(15.1)が成り立つから

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{1}{m} \{ f_{i+1} - c \dot{x}_{i+1} - k x_{i+1} \} \quad (15.9)$$

である。

未知数 ( $x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, \ddot{x}_{i+1}$ ) が 3 個で、方程式は(15.7)・(15.8)・(15.9) の 3 個であるから、それらの未知数を求めることができる。しかし、それらを直接求めるより、まず  $t_i$  に対する  $t_{i+1}$  の変位、速度と加速度の増分すなわち

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta \dot{x}_i = \dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i, \quad \Delta \ddot{x}_i = \ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i \quad (15.10)$$

を求める方が、方程式がすっきりしてわかりやすい。式(15.7)・(15.8)を増分形式に書き直すと以下のとおりとなる。

$$\Delta \dot{x}_i = \ddot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \ddot{x}_i \Delta t \quad (15.11)$$

$$\Delta x_i = \dot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \Delta \ddot{x}_i \Delta t^2 \quad (15.12)$$

また、 $t = t_i$  で式(15.1)が成り立つから

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{m} \{ f_i - c \dot{x}_i - k x_i \} \quad (15.13)$$

である。式(15.9)から(15.13)を引き、増分形式に直すと下式となる。

$$\Delta \ddot{x}_i = \frac{1}{m} \{ \Delta f_i - c \Delta \dot{x}_i - k \Delta x_i \}, \quad \Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad (15.14)$$

未知の増分 ( $\Delta x_i, \Delta \dot{x}_i, \Delta \ddot{x}_i$ ) に関する方程式は、式(15.11)・(15.12)・(15.14)である。それらの増分を求めるためには、まず、式(15.11)・(15.12)を  $\Delta \dot{x}_i$  と  $\Delta \ddot{x}_i$  について解くと

$$\Delta \dot{x}_i = \frac{3}{\Delta t} \Delta x_i - 3\dot{x}_i - \frac{\Delta t}{2} \ddot{x}_i \quad (15.15)$$

$$\Delta \ddot{x}_i = \frac{6}{\Delta t^2} \Delta x_i - \frac{6}{\Delta t} \dot{x}_i - 3\ddot{x}_i \quad (15.16)$$

となる。式(15.15)・(15.16)を式(15.14)に代入し、 $\Delta x_i$ について解けば

$$\Delta x_i = \frac{\Delta \bar{f}_i}{\bar{k}} \quad (15.17)$$

$$\bar{k} = \frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + k, \quad \Delta \bar{f}_i = \Delta f_i + \left( \frac{6m}{\Delta t} + 3c \right) \dot{x}_i + \left( 3m + \frac{c\Delta t}{2} \right) \ddot{x}_i \quad (15.18)$$

となる。速度の増分  $\Delta \dot{x}_i$  は、式(15.17)を(15.15)に代入することによって求まる。

時刻  $t_{i+1}$  の変位  $x_{i+1}$  と速度  $\dot{x}_{i+1}$  は、増分式(15.10)に、それぞれ  $\Delta x_i$  と  $\Delta \dot{x}_i$  を代入することによって得られる。すなわち

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, \quad \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta \dot{x}_i \quad (15.19)$$

である。加速度は、式(15.19)を(15.9)に直接代入することによって求める。

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{1}{m} \{ f_{i+1} - c\dot{x}_{i+1} - kx_{i+1} \} \quad (15.20)$$

## (2) 平均加速度法

図 15.1 の線分④に示すように、この方法は、時間区分  $t_i < t < t_{i+1}$  において、加速度  $\ddot{x}(t)$  が一定で、両端の加速度の平均値に等しいと仮定する。すなわち

$$\ddot{x}(t) = \frac{\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i}{2} \quad (15.21)$$

である。この式を積分すると、速度と変位が求まる。

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_i + \int_{t_i}^t \ddot{x}(t) dt = \dot{x}_i + \frac{\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i}{2} (t - t_i) \quad (15.22)$$

$$x(t) = x_i + \int_{t_i}^t \dot{x}(t) dt = x_i + \dot{x}_i (t - t_i) + \frac{\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i}{4} (t - t_i)^2 \quad (15.23)$$

式(15.22)・(15.23)に  $t = t_{i+1}$  を代入すると下式となる。

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i}{2} \Delta t \quad (15.24)$$



$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \frac{\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i}{4} \Delta t^2 \quad (15.25)$$

式(15.24)・(15.25)を変形し、増分形式に書き直すと

$$\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i = \frac{\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i}{2} \Delta t = \frac{(\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i) + 2\ddot{x}_i}{2} \Delta t = \frac{\Delta \ddot{x}_i + 2\ddot{x}_i}{2} \Delta t$$

$$x_{i+1} - x_i = \dot{x}_i \Delta t + \frac{\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i}{4} \Delta t^2 = \dot{x}_i \Delta t + \frac{(\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i) + 2\ddot{x}_i}{4} \Delta t^2 = \dot{x}_i \Delta t + \frac{\Delta \ddot{x}_i + 2\ddot{x}_i}{4} \Delta t^2$$

$$\therefore \Delta \dot{x}_i = \ddot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \ddot{x}_i \Delta t \quad (15.26)$$

$$\Delta x_i = \dot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_i \Delta t^2 + \frac{1}{4} \Delta \ddot{x}_i \Delta t^2 \quad (15.27)$$

となる。

式(15.26)・(15.27)を $\Delta \dot{x}_i$ と $\Delta \ddot{x}_i$ について解くと

$$\Delta \dot{x}_i = \frac{2}{\Delta t} \Delta x_i - 2\dot{x}_i, \quad \Delta \ddot{x}_i = \frac{4}{\Delta t^2} \Delta x_i - \frac{4}{\Delta t} \dot{x}_i - 2\ddot{x}_i \quad (15.28)$$

となる。式(15.28)を(15.14)に代入して、 $\Delta x_i$ について解くと

$$\Delta x_i = \frac{\Delta \bar{f}_i}{\bar{k}} \quad (15.29)$$

$$\bar{k} = \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + k, \quad \Delta \bar{f}_i = \Delta f_i + \left( \frac{4m}{\Delta t} + 2c \right) \dot{x}_i + 2m\ddot{x}_i \quad (15.30)$$

となる。

時刻 $t_{i+1}$ の変位 $x_{i+1}$ 、速度 $\dot{x}_{i+1}$ と加速度 $\ddot{x}_{i+1}$ の求め方は、線形加速度法と同じである。

## 15.2 加速度法の数学的意味

### (1) テイラー展開

$t$ の関数 $x(t)$ を $t=a$ でテイラー展開すると

$$\begin{aligned}
 x(t) = & x(a) + \dot{x}(a)(t-a) + \frac{\ddot{x}(a)}{2!}(t-a)^2 + \frac{\ddot{\ddot{x}}(a)}{3!}(t-a)^3 \\
 & + \cdots + \frac{x^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n + \frac{x^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(t-a)^{n+1}
 \end{aligned}
 \tag{15.31}$$

となる。右辺の最後の項

$$R = \frac{x^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(t-a)^{n+1}
 \tag{15.32}$$

は、**剰余**とよばれ、式(15.30)を満足する $\xi$ が $a$ と $t$ の間に少なくとも1つ存在する。 $x(t)$ を右辺の $(t-a)^n$ までの項で近似すると、剰余は誤差を意味し、その大きさは $(t-a)$ が十分に小さいと、 $(t-a)^{n+1}$ の定数倍程度であり、 $(t-a)$ を0に近づけていった場合、 $(t-a)^{n+1}$ の速さで0に収束することを意味している。

## (2) 線形加速度法

変位 $x(t)$ を $t_i$ でテイラー展開し、 $n=3$ の項までで近似すると

$$x(t) = x_i + \dot{x}_i(t-t_i) + \frac{\ddot{x}_i}{2!}(t-t_i)^2 + \frac{\ddot{\ddot{x}}_i}{3!}(t-t_i)^3
 \tag{15.33}$$

となる。これを続けて2回微分すると、それぞれ速度と加速度

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_i + \ddot{x}_i(t-t_i) + \frac{\ddot{\ddot{x}}_i}{2}(t-t_i)^2
 \tag{15.34}$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_i + \ddot{\ddot{x}}_i(t-t_i)
 \tag{15.35}$$

となる。

式(15.35)に $t=t_{i+1}$ を代入すると

$$\ddot{x}_{i+1} = \ddot{x}_i + \ddot{\ddot{x}}_i \Delta t, \quad \therefore \ddot{\ddot{x}}_i = \frac{\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i}{\Delta t}$$

となる。これを式(15.35)に代入すると

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_i + \frac{\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i}{\Delta t}(t-t_i)
 \tag{15.36}$$

なる。これは式(15.4)と一致する。すなわち、線形加速度法とは、変位 $x(t)$ を $t_i$ でテイラー展開した $n=3$ の項までの近似である。

## (3) 平均加速度法

変位 $x(t)$ を $t_i$ でテイラー展開し、 $n=2$ の項までで近似すると

$$x(t) = x_i + \dot{x}_i(t-t_i) + \frac{\ddot{x}_i}{2!}(t-t_i)^2 \quad (15.37)$$

となる。これを2回続けて微分すると、それぞれ速度と加速度は

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_i + \ddot{x}_i(t-t_i) \quad (t_i \leq t < t_{i+1}) \quad (15.38)$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_i \quad (t_i \leq t < t_{i+1}) \quad (15.39)$$

となる。すなわち、この方法は、図15.1(a)の線分②に示すように、時間区分全域において、加速度が時間区分の最初の加速度に等しいという仮定である。

変位  $x(t)$  を  $t_{i+1}$  でテイラー展開し、 $n=2$  の項までで近似すると

$$x(t) = x_{i+1} + \dot{x}_{i+1}(t-t_{i+1}) + \frac{\ddot{x}_{i+1}}{2!}(t-t_{i+1})^2 \quad (15.40)$$

となる。これを微分すると、速度と加速度は、それぞれ

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_{i+1} + \ddot{x}_{i+1}(t-t_{i+1}) \quad (t_i < t \leq t_{i+1}) \quad (15.41)$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_{i+1} \quad (t_i < t \leq t_{i+1}) \quad (15.42)$$

となる。この方法は、図15.1(a)の線分③に示すように、時間区分全域において、加速度が時間区分の最後の加速度に等しいという仮定である。

平均加速度法は、図15.1からもわかるように、変位  $x(t)$  を “ $t_i$  でテイラー展開した  $n=2$  の項までの近似” と “ $t_{i+1}$  でテイラー展開した  $n=2$  の項までの近似” の平均である。この方法は、線形加速度法より計算精度が劣る。

### 15.3 ニューマーク $\beta$ 法

各種の加速度法をパラメータ  $\beta$  で統合したのが **ニューマーク  $\beta$  法 (Newmark)** である。すなわち “線形加速度法の増分式(15.11)・(15.12)” と “平均化速度法の増分式(15.26)・(15.27)” を比較して、パラメータ  $\beta$  によって、それらは

$$\Delta \dot{x}_i = \ddot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \ddot{x}_i \Delta t \quad (15.43)$$

$$\Delta x_i = \dot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_i \Delta t^2 + \beta \Delta \ddot{x}_i \Delta t^2 \quad (15.44)$$

表わすことができる。ただし、 $\beta=1/6$  と  $\beta=1/4$  の場合が、それぞれ線形加速度法と平均化速度法である。これがニューマーク  $\beta$  法である。

式(15.43)・(15.44)を $\Delta\dot{x}_i$ と $\Delta\ddot{x}_i$ について解くと下式となる。

$$\Delta\dot{x}_i = \frac{1}{2\beta\Delta t}\Delta x_i - \frac{1}{2\beta}\dot{x}_i + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right)\ddot{x}_i\Delta t \quad (15.45)$$

$$\Delta\ddot{x}_i = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta x_i - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_i - \frac{1}{2\beta}\ddot{x}_i \quad (15.46)$$

式(15.45)・(15.46)を(15.14)に代入して、 $\Delta x_i$ について解くと

$$\Delta x_i = \frac{\Delta\bar{f}_i}{\bar{k}} \quad (15.47)$$

$$\bar{k} = \frac{m}{\beta\Delta t^2} + \frac{c}{2\beta\Delta t} + k \quad (15.48)$$

$$\Delta\bar{f}_i = \Delta f_i + \left\{\frac{m}{\beta\Delta t} + \frac{c}{2\beta}\right\}\dot{x}_i + \left\{\frac{m}{2\beta} - c\Delta t\left(1 - \frac{1}{4\beta}\right)\right\}\ddot{x}_i \quad (15.49)$$

となる。

時刻 $t_{i+1}$ の変位、速度と加速度の求め方は、線形加速度法と同じである。

ニューマークは $1/6 \leq \beta \leq 1/2$ を推奨している。 $\beta$ の小さい方が計算精度は高い。中規模の地震を想定した線形解析では、通常、積分時間間隔 $\Delta t = 0.01\text{s}$ が用いられる。しかし、大地震を想定した非線形応答解析では、地震加速度の変化が大きいため、 $\beta$ が小さいと、安定解が得られず計算が発散してしまうことが多い。 $\beta = 1/6$ の線形加速度法の場合、積分時間間隔 $\Delta t$ と最小固有周期 $T_{\min}$ との比が $1/1.8$ より大きいと発散するといわれており、一般に安定解を得る目安としてその比を $1/10$ より小さくする必要がある。通常、 $\beta = 1/4$ あるいは $1/3$ 、積分時間間隔 $\Delta t = 0.005 \sim 0.001\text{s}$ (橋梁・建築では $0.002\text{s}$ )が用いられる。

### 例題 15.a ニューマーク $\beta$ 法

運動方程式(15.1)で“ $m = 1\text{kg}, c = 0, k = 0, f(t) = t$ ”の場合について、ニューマーク $\beta$ 法( $\beta = 1/6, 1/4, 1/2$ )を用いて近似解を求め、厳密解と比較してみよう。積分時間間隔は $\Delta t = 0.01\text{s}$ とする。したがって、運動方程式は

$$\ddot{x}(t) = t \quad (a)$$

である。

初期条件を $x_0 = 0\text{m}, \dot{x}_0 = 10\text{m/s}$ とすると、 $t = 0$ の加速度は、式(15.3)より

$$\ddot{x}_0 = \ddot{x}(0) = \frac{1}{m} \{f_0 - c\dot{x}_0 - kx_0\} = 0 \quad (\text{b})$$

である。

まず，厳密解を求めよう。式(a)を積分して， $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$  より

$$\dot{x}(t) = \frac{t^2}{2} + 10 \quad (\text{c})$$

である。これを積分して， $x(0) = x_0 = 0$  より

$$x(t) = \frac{t^3}{6} + 10t \quad (\text{d})$$

である。したがって， $t = t_1 = 0.01 \text{ s}$  の変位の厳密解は以下のとおりである。

$$x_1 = \frac{0.01^3}{6} + 10 \times 0.01 = 0.100000166 \text{ m} \quad (\text{e})$$

$\beta = 1/6$  すなわち線形加速度法の場合，式(15.48)・(15.49)より

$$\bar{k} = \frac{6}{0.01^2} = 60000 \text{ kg/s}^2$$

$$\Delta \bar{f}_0 = 0.01 + \frac{6}{0.01} \times 10 = 6000.01 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

である。これらを式(15.47)に代入すると，

$$\Delta x_0 = \frac{\Delta \bar{f}_0}{\bar{k}} = \frac{6000.01}{60000} = 0.100000166 \text{ m}$$

となる。ゆえに， $t_1 = 0.01 \text{ s}$  の変位は，式(15.19)より

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 0.100000166 \text{ m} \quad (\text{f})$$

となる。これが厳密解(e)と一致するのは，加速度が式(a)からわかるように，線形に変化しており，線形加速度法の仮定と一致するからである。

$\beta = 1/4$  すなわち平均加速度法の場合，式(15.48)・(15.49)より

$$\bar{k} = \frac{4}{0.01^2} = 40000 \text{ kg/s}^2$$

$$\Delta \bar{f}_0 = 0.01 + \frac{4}{0.01} \times 10 = 4000.01 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

である。これらを式(15.47)に代入すると，

$$\Delta x_0 = \frac{\Delta \bar{f}_0}{k} = \frac{4000.01}{40000} = 0.10000025\text{m}$$

となる。ゆえに、 $t_1 = 0.01\text{s}$ の変位は、式(15.19)より以下のとおりである。

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 0.10000025\text{m} \quad (\text{g})$$

$\beta = 1/2$ の場合、式(15.48)・(15.49)より

$$\bar{k} = \frac{2}{0.01^2} = 20000\text{kg/s}^2$$

$$\Delta \bar{f}_0 = 0.01 + \frac{2}{0.01} \times 10 = 2000.01\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

である。これらを式(15.47)に代入すると、

$$\Delta x_0 = \frac{\Delta \bar{f}_0}{\bar{k}} = \frac{2000.01}{20000} = 0.1000005\text{m}$$

となる。ゆえに、 $t_1 = 0.01\text{s}$ の変位は、式(15.19)より以下のとおりである。

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 0.1000005\text{m} \quad (\text{h})$$

以上のことから、 $\beta$ が大きくなるにしたがって、精度が落ちることがわかる。

## 15.4 要約

加速度法によって、振動状態(変位、速度と加速度)を求める手順は、①時刻  $t = 0$ の振動状態を計算する、②微小時間を  $\Delta t$ とすると、 $0 < t < \Delta t$ の加速度の変化を仮定し、 $t = \Delta t$ の振動状態を計算する、③それ以降は、同様に、等時間間隔  $\Delta t$ で順次に振動状態を計算する。線形加速度法では加速度が線形に変化すると仮定し、平均加速度法では加速度が一定で、両端の加速度の平均値に等しいと仮定する。各種の加速度法をパラメータ  $\beta$ で統合したのがニューマーク  $\beta$ 法である。

## 第 16 章 非線形解析

この章では、1 自由度系の非線形応答解析の手順を説明するとともに、それに用いられる復元力の非線形履歴モデルを解説する。

### 16.1 非線形解析の手順

復元力  $Q$  が“変位の履歴”に依存する場合、1 自由度系の運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Q = f(t) \quad (16.1)$$

と表せる。したがって、時刻  $t_i$  と  $t_{i+1}$  に対して、下式が成り立つ。

$$m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + Q_i = f_i \quad (16.2)$$

$$m\ddot{x}_{i+1} + c\dot{x}_{i+1} + Q_{i+1} = f_{i+1} \quad (16.3)$$

式(16.3)から(16.2)を引いて、増分形式にすると

$$m\Delta\ddot{x}_i + c\Delta\dot{x}_i + (Q_{i+1} - Q_i) = \Delta f_i \quad (16.4)$$

となる。

速度と加速度の増分は、ニューマーク  $\beta$  法を用いと、式(15.45)・(15.46)より

$$\Delta\dot{x}_i = \frac{1}{2\beta\Delta t}\Delta x_i - \frac{1}{2\beta}\dot{x}_i + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right)\ddot{x}_i\Delta t \quad (16.5)$$

$$\Delta\ddot{x}_i = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta x_i - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_i - \frac{1}{2\beta}\ddot{x}_i \quad (16.6)$$

である。

時刻  $t_i$  の振動状態  $(x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i)$  が既知である場合、 $t_{i+1}$  の未知の振動状態  $(x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, \ddot{x}_{i+1})$  を求めるためには、未知数  $\Delta x_i, \Delta\dot{x}_i, \Delta\ddot{x}_i$  に関する連立 1 次方程式 (16.4)・(16.5)・(16.6)を解けばよい。しかし、 $Q_{i+1}$  が未知であるので、それを仮定する必要がある。

$t_i < t \leq t_{i+1}$  における復元力  $Q$  の増加は、図 16.1 に示すように、 $x_i$  における接線剛性  $k_i$  に比例する仮定すると、 $t_{i+1}$  における復元力の仮定値  $(Q_{i+1})_a$  は

$$(Q_{i+1})_a = Q_i + k_i\Delta x_i \quad (16.7)$$

となる。式(16.7)を(16.4)に代入すると

$$m\Delta\ddot{x}_i + c\Delta\dot{x}_i + k_i\Delta x_i = \Delta f_i \quad (16.8)$$

となる。

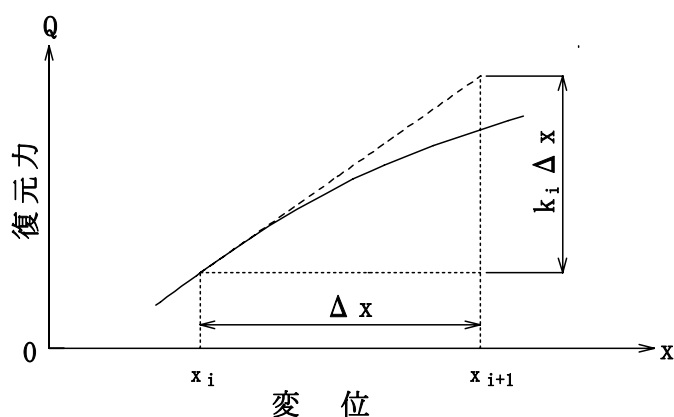


図 16.1 接線剛性

式(16.5)・(16.6)・(16.8)を解くと

$$\Delta x_i = \frac{\Delta \bar{f}_i}{\bar{k}_i} \quad (16.9)$$

$$\bar{k}_i = \frac{m}{\beta \Delta t^2} + \frac{c}{2\beta \Delta t} + k_i \quad (16.10)$$

$$\Delta \bar{f}_i = \Delta f_i + \left\{ \frac{m}{2\beta} - c\Delta t \left( 1 - \frac{1}{4\beta} \right) \right\} \ddot{x}_i + \left\{ \frac{m}{\beta \Delta t} + \frac{c}{2\beta} \right\} \dot{x}_i \quad (16.11)$$

となる。

式(16.9)を(16.5)に代入すると、 $\Delta x_i$ が求まる。変位  $x_{i+1}$  と速度  $\dot{x}_{i+1}$  は、 $\Delta x_i$  と  $\Delta \dot{x}_i$  を増分式(15.10)に代入することによって求まる。すなわち

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, \quad \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta \dot{x}_i \quad (16.12)$$

である。

変位  $x_{i+1}$  が定まったので、復元力  $Q_{i+1}$  ( $(Q_{i+1})_a$  ではない) は履歴特性から定まる。この  $Q_{i+1}$  と式(16.12)の速度  $\dot{x}_{i+1}$  を式(16.3)に代入すると、加速度  $\ddot{x}_{i+1}$

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{1}{m} (f_{i+1} - c\dot{x}_{i+1} - Q_{i+1}) \quad (16.13)$$

が求まる。

非線形解析では、このようにして順次に振動状態を計算する。 $\beta=1/4$  とすると、式(16.5)の3項が0となるために安定解が得られない場合(特に質量のない自由度の加速度)がある。その場合、 $\beta=1/3$  にすると安定解を得ることが出来る。



## 16.2 復元力の非線形履歴モデル

復元力と変位の関係は、変位が小さい範囲ではほぼ線形に挙動する。しかし、変位が大きくなると降伏し、明確な**履歴ループ**(hysteresis loop)を描くようになる。

信頼性のある非線形解析を行なうためには、各要素の履歴特性を適切に表現した非線形履歴モデルを用いる必要がある。それは、種々提案されている。そのモデルでは、骨格曲線と履歴特性の規則が定められている。**骨格曲線**(skeleton curve)とは、要素を無載荷状態から単調に荷重をプラス方向あるいはマイナス方向に増加させていった場合に、変位に対して復元力が描く曲線である。ここでは、図 16.2 に示す“動的解析によく用いられる非線形履歴モデル”である、①**バイリニアモデル**(bilinear)、②**トリリニアモデル**(trilinear)と③**ランベルグ・オズグッドモデル**(Ramberg Osgood)などの共通の履歴規則を説明する。

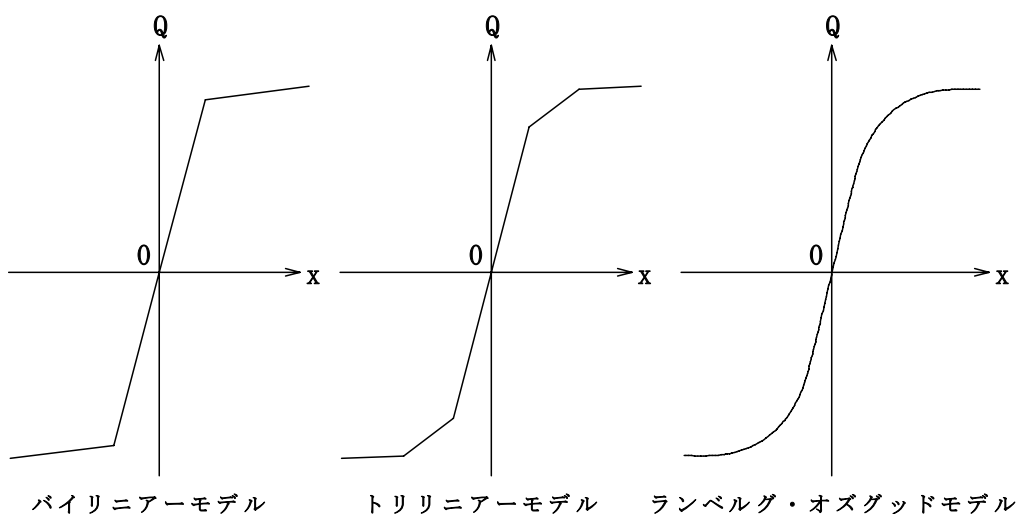


図 16.2 非線形履歴モデルの骨格曲線

これらのモデルで、履歴特性に関する共通の規則が 2 つある。1 つは、**Masing**の規則である。骨格曲線を

$$Q = Q(x) \tag{16.14}$$

とすると、図 16.3 に示すように、無載荷状態(0,0)から単調に復元力を増加させて、 $A(x_a, Q_a)$ で除荷を開始したとする。その除荷曲線は、骨格曲線  $OA$  をち

よほど2倍だけ間延びした曲線を描いて戻ってくるとする。したがって、その曲線は、原点に対してAと点对称なC(-x<sub>a</sub>, -Q<sub>a</sub>)で骨格曲線と交わる。骨格曲線上の任意の点(x, Q)に対応した除荷曲線の点を(x̄, Q̄)とすると、規則から

$$\frac{x_a - \bar{x}}{x} = 2, \quad \frac{Q_a - \bar{Q}}{Q} = 2$$

$$\therefore x = \frac{x_a - \bar{x}}{2}, \quad Q = \frac{Q_a - \bar{Q}}{2}$$

となる。この式を式(16.14)に代入すると

$$\frac{Q_a - \bar{Q}}{2} = Q \left( \frac{x_a - \bar{x}}{2} \right)$$

となる。x̄をxに、Q̄をQに変更すると除荷曲線は、下式となる。

$$\frac{Q_a - Q}{2} = Q \left( \frac{x_a - x}{2} \right) \tag{16.15}$$

除荷曲線上のB(x<sub>b</sub>, Q<sub>b</sub>)から再載荷した場合の曲線は、同様に

$$\frac{Q_b - Q}{2} = Q \left( \frac{x_b - x}{2} \right) \tag{16.16}$$

である。

もう1つの履歴特性に関する規則は、除荷曲線や再載荷曲線が骨格曲線と交わった場合には、それ以降は骨格曲線上を移動するということである。

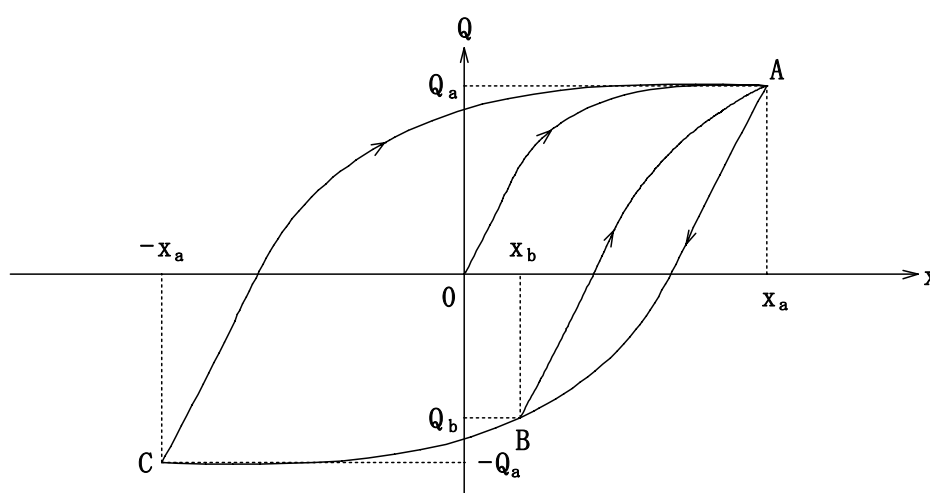


図16.3 非線形履歴の規則

### 16.3 要約

非線形動的解析の逐次近似法では、時間区分  $t_i < t \leq t_{i+1}$  で、復元力  $Q$  が、 $x_i$  の接線剛性  $k_i$  に比例して増加する仮定して計算する。

#### 第 4 部の参考文献

- [4.1] 高橋大輔, (2000), “数値計算”, 岩波書店。
- [4.2] 川村哲也, (2000), “キーポイント偏微分方程式”, 岩波書店。
- [4.3] Mario Paz, (1997), “Structural Dynamics”, Chapman & Hall。
- [4.4] 柴田明徳, (2000), “最新耐震構造解析”, 森北出版株式会社。
- [4.5] 数学ハンドブック編集委員会, (1989), “理工学のための数学ハンドブック”, 丸善株式会社。

## 第 5 部 振動学と“複素数”

振動を深く学ぼうとする人にとって、複素数の数学的手法は必須である。この部はそのような人のためのものである。物理や数学において、複素数の応用範囲は極めて広い。振動学のような周期的な関数を扱う学問では、特にその威力を発揮する。しかし、複素数を“観念上の数”としか認識していない人にとって、それは理解を混乱させるだけのものでしかない。複素数が“実在する数”であるという観点から熱心に解説している数学の本が、少数存在する(参考文献[5.1])。それ等を参考として、振動学への応用の視点から複素数を説明する。

### 第 17 章 複素数

#### 17.1 複素数とは

2 次方程式

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

の解は、公式から

$$x = -1 \pm 2\sqrt{-1}$$

である。 $i \equiv \sqrt{-1}$  とおくと

$$x = -1 \pm 2i$$

と表せる。このような数を**複素数**といい、 $i$ を**虚数単位**とよぶ。

複素数の意味を考えるために、以下の簡単な方程式について考えてみよう。

$$x^2 = 4 \text{ の解は, } x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \tag{17.1}$$

である。しからば、方程式

$$x^2 = -4 \tag{17.2}$$

では、“ $x^2 \geq 0$  であるので解が存在しない”，それとも“解は  $x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$ ” と考えるべきであろうか。また、後者であれば、 $2i$ とはどのような数であろうか。これを考える前に、“正と負の数”について考えてみよう。

3 個のリンゴから 5 個を取り去ったとき、残った個数  $N$  を求める方程式は

$$N = 3 - 5 \tag{17.3}$$

である。標高 3m より 5m 低い標高  $x$  m を求める方程式は

$$x = 3 - 5 \quad (17.4)$$

である。それぞれの方程式の解は

$$N = -2, \quad x = -2 \quad (17.5)$$

である。最終的な答えは、問題の本質を考えて、前者の問題に対しては“元の個数より多い個数を取り去ることができないので、解なし”，後者の問題に対しては“標高は $-2\text{m}$ ”である。

以上のことから、“問題を解く”ということは、①方程式を構築する、②方程式を解く、③その解を評価して目的と合致した答えであるかどうかを判断する、という3つの段階で構成されていることがわかる。“リンゴの問題”における①と③の段階では、 $N$ は正の整数である。それに対して、“標高の問題”における①と③の段階では、 $x$ は実数である。しかし、②の段階では、両問題とも、見かけ上で未知数の名が異なるが、完全に同じ方程式を解いている。

すなわち、次のことが言えるのではないか。方程式を解く段階においては、未知数は、整数を含んだすべての数すなわち実数を意味している。さらに、“真のすべての数”とは複素数であるから、方程式の未知数は複素数を意味していると考えべきではないか。

言い換えると、方程式(17.3)あるいは(17.4)の未知数は、自然数(1,2,...)の概念しか持ち合わせていない子供においては自然数であると思込み、大人でも複素数に対する認識が不足している場合は実数であると思込んでいるにすぎない。このような錯覚は、方程式の構築の段階では、通常、実数を対象としているからである。したがって、いかなる場合でも、方程式における未知数は、複素数を意味していると考えるべきである。

負の数の幾何学的な意味を考えてみよう。実数は、図17.1(a)に示す数直線で表される。正の数4と負の数 $-4$ は、原点 $O$ に対して対称な点Aと点Bで表される。 $-4 = 4 \times (-1)$ であるから、4に $-1$ を乗じることは、同図に示すように、4(点A)を $\pi$ だけ回転させて $-4$ (点B)に移動させることを意味している。

式(17.2)の解の一つである $x = 2i$ について考えてみよう。式(17.2)を満足するから

$$(2i)^2 = (4 \times i) \times i = -4$$

である。すなわち、4に $i$ を2回乗じることは、4(点A)を $\pi$ だけ回転させて $-4$ (点

B)に移動させることを意味する。したがって、4に*i*を1回乗じることは、図17.1(a)に示すように、4(点A)を $\pi/2$ だけ回転(時計と逆回りを正とする)させて4*i*(点C)に移動させることである。数直線を $\pi/2$ だけ回転させた縦軸上の数は、**純虚数**  $bi$  ( $b$ 実数)であるので、縦軸を**虚軸**という。それに対して横軸である数直線上の数は実数であるので、その軸を**実軸**とよぶ。両軸で構成された平面を**複素平面**という。複素数を取り扱うときには、常に複素平面を描いて考えるとわかりやすい。

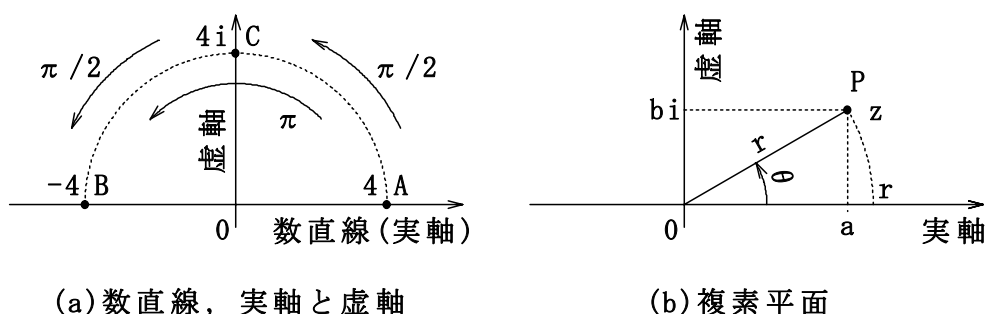


図17.1 数直線と複素平面

複素平面上で、正の実定数  $r$  を  $\theta$  だけ回転させた数  $z$  (点 P) は、図 17.1(b) からわかるように

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

と表せる。このように複素平面上の点として表される数を複素数とよぶ。実数は、複素数において  $\theta = n\pi$  ( $n$  は整数) の特殊な数である。

$a, b$  を実定数とすると、複素数は、一般に

$$z = a + bi \tag{17.6}$$

と表せる。 $a$  と  $b$  を**実部**と**虚部**とよび、それぞれ  $\text{Re}(z)$  と  $\text{Im}(z)$  で表す。2 つの複素数  $z = a + bi, w = c + di$  が等しいとは、図 17.1(b) の複素平面からわかるように、実部と虚部がそれぞれ等しい場合である。すなわち

$$z = w \leftrightarrow a = c, b = d \tag{17.7}$$

である。また、複素数  $z$  が 0 とは、実部と虚部がそれぞれ 0 の場合である。すなわち

$$z = a + bi = 0 \leftrightarrow a = 0, b = 0 \tag{17.8}$$

である。

$x, y$  が実変数の場合，複素数

$$z = x + yi \quad (17.9)$$

を**複素変数**という。

複素数を極座標すなわち原点からの距離  $r$  と実軸に対する角度  $\theta$  で表すと

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \theta = \frac{b}{a} \quad (17.10)$$

となる。これを複素数  $z$  の**極形式**という。 $r$  と  $\theta$  を，それぞれ複素数  $z$  の**絶対値**と**偏角**とよび，それぞれ記号  $|z|$  と  $\arg z$  で表す。

自然対数の底  $e$  の指数関数  $e^x$  をマクローリン級数に展開すると

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

となる。これを純虚数  $x = i\theta$  に拡張すると

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right) \end{aligned}$$

となる。最右辺の第 1 項と 2 項は，それぞれ  $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  のマクローリン級数展開であるから

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (17.11)$$

である。これが**オイラーの公式**である。これを用いると，式(17.10)は，以下のように指数で表すことができる。

$$z = r e^{i\theta} \quad (r \text{ は正の実定数}) \quad (17.12)$$

このように，複素数は 3 つの方法すなわち式(17.6)・(17.10)・(17.12)で表すことができる。それぞれ，有益な点があるが，指数で表した式(17.12)のすぐれている点は，微分あるいは積分した場合に形が変わらないことである。

### 例題 17.a 減衰自由振動の解(斉次解)

減衰自由振動の微分方程式(2.15)を再掲すると

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (a)$$

である。複素数を用いて，この方程式を解くことによって，複素数の概念を把

握しよう。

式(a)を構築する段階では、 $x$ は時間 $t$ に対する実変数である。しかし、方程式を解く段階では、それは複素変数 $z$ となる。したがって、式(a)は

$$\ddot{z} + 2h\omega\dot{z} + \omega^2 z = 0 \quad (b)$$

と表せる。 $h, \omega$ は与えられた実定数である。初期条件

$$z(0) = d_0, \quad \dot{z}(0) = v_0 \quad (c)$$

は実定数である。

この微分方程式の解を

$$z = Ce^{\lambda t} \quad (d)$$

と仮定する。 $C, \lambda$ は初期条件から定まる複素定数である。式(d)を(b)に代入すると

$$C(\lambda^2 + 2h\omega\lambda + \omega^2)e^{\lambda t} = 0$$

となる。 $e^{\lambda t} \neq 0$ より

$$\lambda^2 + 2h\omega\lambda + \omega^2 = 0$$

である。この2次方程式を解くと次式を得る。

$$\lambda = -h\omega \pm \sqrt{h^2 - 1}\omega \quad (e)$$

$h \neq 1$ であれば、2つの独立な基本解

$$z_1 = e^{(-h\omega + \sqrt{h^2 - 1}\omega)t} = e^{-h\omega t} e^{\sqrt{h^2 - 1}\omega t}, \quad z_2 = e^{(-h\omega - \sqrt{h^2 - 1}\omega)t} = e^{-h\omega t} e^{-\sqrt{h^2 - 1}\omega t} \quad (f)$$

が得られるので、一般解はそれらを1次結合した下式である。

$$z = e^{-h\omega t} \left( C_1 e^{\sqrt{h^2 - 1}\omega t} + C_2 e^{-\sqrt{h^2 - 1}\omega t} \right) \quad (g)$$

$h = 1$ であるば、1つの基本解

$$z_1 = e^{-h\omega t} \quad (h)$$

しか得られないので、もう1つの独立な基本解を得るために別の工夫が必要である。

それでは、 $h < 1, h > 1, h = 1$ の3つの場合について解を求めてみよう。

(a)  $h < 1$

式(f)は



$$z = e^{-hot} (C_1 e^{i\omega_D t} + C_2 e^{-i\omega_D t}), \quad \omega_D = \sqrt{1-h^2} \omega \quad (i)$$

と表せる。初期条件が実数であるので、定数を定めるためには、解(i)を実数と虚数に分離する必要がある。複素定数  $C_1, C_2$  を、それらに分離すると

$$C_1 = c_1 + d_1 i, \quad C_2 = c_2 + d_2 i \quad (c_1, c_2, d_1, d_2 \text{ は実定数}) \quad (j)$$

となる。また、指数  $e^{i\omega_D t}, e^{-i\omega_D t}$  も、オイラーの公式(17.11)によって、実数と虚数に分離できるので、式(i)は

$$\begin{aligned} z &= e^{-hot} \{ (c_1 + d_1 i)(\cos \omega_D t + i \sin \omega_D t) + (c_2 + d_2 i)(\cos \omega_D t - i \sin \omega_D t) \} \\ &= e^{-hot} [ (c_1 + c_2) \cos \omega_D t + (-d_1 + d_2) \sin \omega_D t \\ &\quad + i \{ (d_1 + d_2) \cos \omega_D t + (c_1 - c_2) \sin \omega_D t \} ] \end{aligned}$$

となる。あらためて  $a_1 \equiv c_1 + c_2, a_2 \equiv -d_1 + d_2, b_1 \equiv d_1 + d_2, b_2 \equiv c_1 - c_2$  とおくと

$$z = e^{-hot} (a_1 \cos \omega_D t + a_2 \sin \omega_D t) + i e^{-hot} (b_1 \cos \omega_D t + b_2 \sin \omega_D t) \quad (k)$$

となる。

式(k)に、初期条件  $t=0, z=d_0$  を代入すると

$$a_1 + i b_1 = d_0, \quad \therefore a_1 = d_0, \quad b_1 = 0$$

である。これらを式(k)に代入すると

$$z = e^{-hot} (d_0 \cos \omega_D t + a_2 \sin \omega_D t) + i b_2 e^{-hot} \sin \omega_D t \quad (l)$$

となる。これを微分すると

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -h\omega e^{-hot} (d_0 \cos \omega_D t + a_2 \sin \omega_D t) + e^{-hot} (-d_0 \omega_D \sin \omega_D t + a_2 \omega_D \cos \omega_D t) \\ &\quad - i h\omega b_2 e^{-hot} \sin \omega_D t + i b_2 \omega_D e^{-hot} \cos \omega_D t \end{aligned} \quad (m)$$

となる。初期条件  $t=0, \dot{z}=v_0$  を代入すると

$$-h\omega d_0 + a_2 \omega_D + i b_2 \omega_D = v_0, \quad \therefore a_2 = \frac{v_0 + h\omega d_0}{\omega_D}, \quad b_2 = 0$$

である。

したがって、解は

$$z = e^{-hot} (a_1 \cos \omega_D t + a_2 \sin \omega_D t) \quad (n)$$

$$a_1 = d_0, \quad a_2 = \frac{v_0 + h\omega d_0}{\omega_D} \quad (o)$$

である。2.2節の複素数を用いない解法と比べられたい。

以上、複素数の概念が良くわかるように、ていねいに解いたが、実は、解(n)は式(k)から直ちにわかる。すなわち、微分方程式(b)の解を

$$z = x + yi \quad (x, y \text{ は実変数}) \quad (\text{p})$$

とおき、これを式(b)に代入すると、線形方程式であるので

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x + i(\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2 y) = 0$$

となる。ゆえに

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2 y = 0 \end{cases} \quad (\text{q})$$

である。すなわち、複素変数  $z$  の微分方程式(b)の実部あるいは虚部を 0 とおいた微分方程式は、元の実変数の微分方程式(a)に一致する。したがって、複素微分方程式(b)の解(n)の実部  $x$  あるいは虚部  $y$  は、最終的に求める一般解である。注意しなければならないことは、 $z$  を実数の範囲に限定して方程式を解くと、途中で不能となる場合があるので、あくまですべての数すなわち複素数として、方程式を解く必要がある。

(b)  $h > 1$

式(g)の  $\sqrt{h^2 - 1}$  が実数であるので、定数  $C_1, C_2$  をまわりくどく複素数と考える必要はないが、ここではていねいに複素数と考えて、式(j)を(g)に代入すると

$$z = x + yi = e^{-hot} \left( c_1 e^{\sqrt{h^2 - 1}\omega t} + c_2 e^{-\sqrt{h^2 - 1}\omega t} \right) + i e^{-hot} \left( d_1 e^{\sqrt{h^2 - 1}\omega t} + d_2 e^{-\sqrt{h^2 - 1}\omega t} \right)$$

である。一般解は、実部あるいは虚部であるから

$$x(t) = e^{-hot} \left( a_1 e^{\sqrt{h^2 - 1}\omega t} + a_2 e^{-\sqrt{h^2 - 1}\omega t} \right) \quad (\text{r})$$

である。初期条件に対する特解は割愛する。

(c)  $h = 1$

1 つの基本解(式(h))が、実数であるので、 $C$  は実定数である。したがって、一般解は

$$x(t) = C e^{-\omega t} \quad (\text{s})$$

と表せる。しかし、完全な一般解を得るには、もう 1 つの基本解が必要である。

それには**定数変化法**を用いればよい。すなわち、定数  $C$  を時間の関数  $u(t)$  と考

えると、式(s)は

$$x(t) = ue^{-\omega t} \quad (t)$$

となる。これを2回連続して微分すると

$$\dot{x}(t) = e^{-\omega t} (\dot{u} - \omega u) \quad (u)$$

$$\ddot{x}(t) = e^{-\omega t} (\ddot{u} - 2\omega\dot{u} + \omega^2 u) \quad (v)$$

となる。式(t)・(u)・(v)を(a)に代入し、 $h=1$ を考えると

$$e^{-\omega t} \{(\ddot{u} - 2\omega\dot{u} + \omega^2 u) + (2\omega\dot{u} - 2\omega^2 u) + \omega^2 u\} = e^{-\omega t} \ddot{u} = 0$$

$$\therefore \ddot{u} = 0$$

である。これを2回連続して積分すると

$$u = a_1 t + a_2$$

となる。これを式(t)に代入すると、完全な一般解

$$x(t) = (a_1 t + a_2) e^{-\omega t} \quad (w)$$

を得る。初期条件に対する特解は割愛する。

## 17.2 複素数の性質と公式

### (1) 和と差

2つの複素数  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$  の和と差は、図 17.2(a)に示すように、ベクトルと同様に、それぞれ

$$z + w = (a + c) + (b + d)i, \quad z - w = (a - c) + (b - d)i \quad (17.13)$$

である。

### (2) 積と商

2つの複素数  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$  の積と商は、それぞれ

$$zw = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + da)i \quad (17.14)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - da}{c^2 + d^2} i \quad (17.15)$$

である。

複素数の最大の特徴は、積(すなわち商)の性質にある。それを理解するためには、指数表示がわかりやすい。 $\alpha, \beta$  を実定数とすると、2つの複素数

$$\begin{cases} z = a(\cos \alpha + i \sin \alpha) = ae^{i\alpha} \\ w = b(\cos \beta + i \sin \beta) = be^{i\beta} \end{cases} \quad (a, b \text{は正の実定数}) \quad (17.16)$$

の積は

$$zw = ae^{i\alpha} \cdot be^{i\beta} = abe^{i(\alpha+\beta)} = ab\{\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\} \quad (17.17)$$

である。すなわち、図 17.2(b)に示すように、積  $zw$  の絶対値は  $z$  と  $w$  の絶対値の積で、積の偏角  $\arg zw$  は  $\arg z$  と  $\arg w$  を足し合わせたものである。

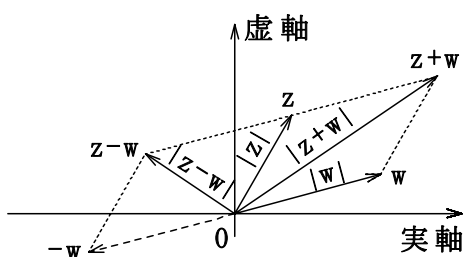
$$|zw| = |z||w|, \quad \arg zw = \arg z + \arg w \quad (17.18)$$

なお、2つの複素数の商  $z/w$

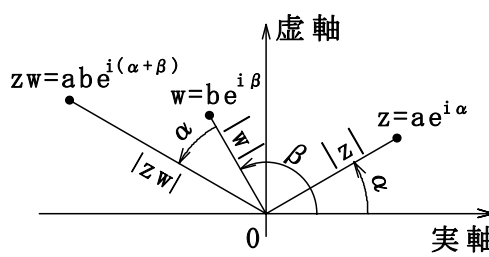
$$z/w = ae^{i\alpha}/be^{i\beta} = abe^{i(\alpha-\beta)} = ab\{\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\} \quad (17.19)$$

$$|z/w| = |z|/|w|, \quad \arg z/w = \arg z - \arg w \quad (17.20)$$

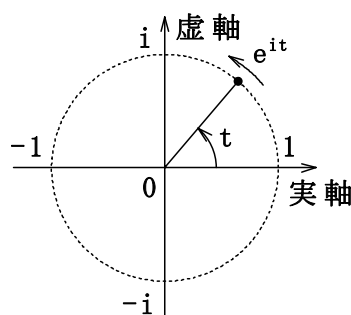
である。



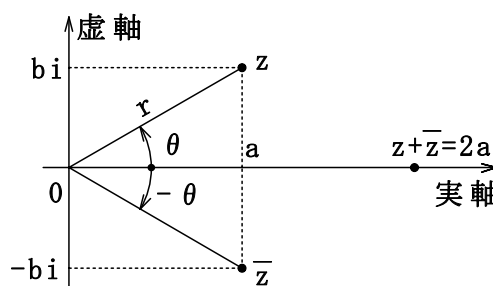
(a) 複素数の和・差と絶対値



(b) 複素数の積



(c)  $e^{it}$  は周期関数



(d) 共役複素数

図 17.2 複素数の性質

### (3) 2つの複素数の和と差の絶対値

2つの複素数  $z, w$  の和と差の絶対値は、式 (17.13) より

$$|z \pm w| = \sqrt{(a \pm b)^2 + (a \pm b)^2} \quad (17.21)$$

である。

#### (4) 複素数の指数関数 $e^{it}$ の周期性

複素数の指数関数  $e^{i\theta}$  の割り算・掛け算は、実数の指数関数  $e^x$  と同様に計算してよい。

時間  $t$  の指数関数

$$z = e^{it} = \cos t + i \sin t \quad (17.22)$$

の絶対値は

$$|z| = |e^{it}| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1 \quad (17.23)$$

であるから、図 17.2(c)に示すように、 $e^{it}$  は、複素平面上で原点を中心とした半径 1 の円を描いて速度 1 rad/s で回転する。 $2\pi$  rad で元に戻るから周期は  $2\pi$  s である。同様に、複素変数

$$z = \cos \omega t + i \sin \omega t = e^{i\omega t} \quad (\omega \text{ は実定数}) \quad (17.24)$$

は、複素平面上で原点を中心として半径 1 の円を描いて速度  $\omega$  rad/s で回転し、周期は  $2\pi / \omega$  s である。

したがって、複素変数

$$z = r(\cos \omega t + i \sin \omega t) = r e^{i\omega t} \quad (r \text{ は正の実定数}) \quad (17.25)$$

は、複素平面上で原点を中心として半径  $r$  の円を描いて速度  $\omega$  rad/s で回転し、周期は  $2\pi / \omega$  s である。

#### (4) 共役複素数

図 17.2(d)に示すように、複素数  $z = a + bi$  の実軸に対称な複素数  $a - bi$  を **共役複素数** とよび、記号  $\bar{z}$  で表す。共役複素数の和

$$z + \bar{z} = 2a = 2 \operatorname{Re}(z) = 2 \operatorname{Re}(\bar{z}) \quad (17.26)$$

は、実数で、共役複素数の実部の 2 倍である。後述する複素フーリエはこれを技巧的に利用している。また、共役複素数の積

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2 \quad (17.27)$$

も実数で、共役複素数の絶対値の 2 乗と一致する。

**例題 17.b 周期複素変数  $e^{i\omega t}$  の共役複素数の動き**

円振動数  $\omega$  の周期複素変数  $z = e^{i\omega t}$  の共役複素変数  $\bar{z}$  の動きを調べよう。

$z = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$  であるから、共役複素変数は

$$\bar{z} = \cos \omega t - i \sin \omega t = \cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t) = e^{-i\omega t} \tag{a}$$

である。したがって、共役複素変数  $\bar{z}$  は、図 17.a に示すように、 $z$  と全く逆方向すなわち実軸に対称に回転する。

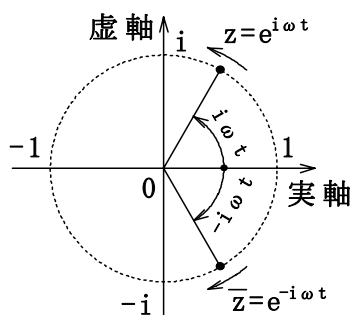


図 17. a 周期複素変数と共役複素変数の関係

**17.3 複素変位と複素振幅**

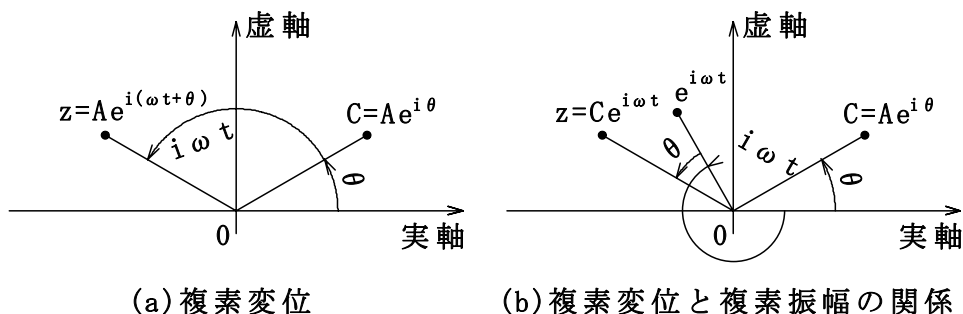


図 17.3 複素変位と複素振幅

図 17.3(a)に示すように、複素平面において、時刻  $t = 0$  の位置が複素定数

$$C = Ae^{i\theta} = A(\cos \theta + i \sin \theta) \tag{17.28}$$

で表される点が、原点を中心に円振動数  $\omega$  で円運動する場合、時刻  $t$  における位置は

$$z(t) = Ae^{i(\omega t + \theta)} = A\{\cos(\omega t + \theta) + i \sin(\omega t + \theta)\} \tag{17.29}$$

と表すことができる。

この複素変数の実部と虚部は、それぞれ

$$\operatorname{Re}(z) = A \cos(\omega t + \theta), \quad \operatorname{Im}(z) = A \sin(\omega t + \theta) \quad (17.30)$$

である。すなわち、それぞれが、振幅  $A$  ・ 円振動数  $\omega$  ・ 初期位相  $\theta$  の、 $\cos$  および  $\sin$  の調和振動である。 $z(t)$  を **複素変位** とよぶ。

式(17.29)に(17.28)を代入すると

$$z(t) = A e^{i\theta} e^{i\omega t} = C e^{i\omega t} \quad (17.31)$$

となる。すなわち、複素変位  $z(t)$  は、図 17.3(b)に示すように、複素定数  $C$  と複素変数  $e^{i\omega t}$  の積として表される。 $C$  は、調和振動の振幅と初期位相の情報が含まれている。すなわち、 $C$  の絶対値と偏角は、それぞれ調和振動の振幅  $A$  と初期位相  $\theta$  を意味している。 $C$  を **複素振幅**(complex amplitude)という。

したがって、一般の調和振動は、複素変位としてとらえることができる。 振動解析で、調和振動を複素変位に置き換えて解析するメリットは、①計算が容易になる、たとえば、指数関数で表すことができるので、微分方程式を解くために大変に都合がよい、なぜならば、何回微分しても形が変わらないからである、②解析結果を複素平面に表すことができるので、具体的にそれを認識できる。 ただし、複素変位を用いた解析では、技巧的な面があるので、次の例題でその点を理解しよう。

### 例題 17.c 調和外力による減衰強制振動の定常解

複素変位を用いて、調和外力による減衰強制振動の定常解(定常振動)を求めてみよう。その運動方程式(3.11)を再掲すると

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin pt \quad (x \text{ は実変数}) \quad (a)$$

である。複素数の性質を利用するために、まず、次のような微分方程式

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2 y = \frac{F_0}{m} \cos pt \quad (y \text{ は実変数}) \quad (b)$$

を考える。式(b)+ $i$ ×(a)は

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2 y + i(\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x) = \frac{F_0}{m} (\cos pt + i \sin pt)$$

である。複素変数  $z \equiv y + xi$  とおき、オイラーの公式から、この式は

$$\ddot{z} + 2h\omega\dot{z} + \omega^2 z = \frac{F_0}{m} e^{ipt} \quad (c)$$

となる。すなわち、複素方程式(c)の複素解  $z$  の虚部  $x$  が、式(a)の解であり、右辺の調和外力が複素変位に置き換えられている。また、複素振幅  $F_0/m$  が実数であるのは、初期位相が 0 のためである。

式(c)の定常解を調和外力の円振動数  $p$  と同じ振動数の複素変位

$$z = Ce^{ipt} \quad (C \text{ は複素振幅}) \quad (d)$$

と仮定し、式(c)に代入すると

$$C(-p^2 e^{ipt}) + 2h\omega C(ip e^{ipt}) + \omega^2 C e^{ipt} = \frac{F_0}{m} e^{ipt}$$

となる。 $r = p/\omega$  とおくと、 $C$  は、 $\omega = \sqrt{k/m}$  より

$$C = \frac{1}{\omega^2 - p^2 + 2h\omega pi} \cdot \frac{F_0}{m} = \frac{1/\omega^2}{1 - (p/\omega)^2 + 2h(p/\omega)i} \cdot \frac{F_0}{m} = \frac{1}{1 - r^2 + 2hri} \cdot \frac{F_0}{k} \quad (e)$$

$$\begin{aligned} \therefore C &= \frac{1 - r^2 - 2hri}{(1 - r^2 + 2hri)(1 - r^2 - 2hri)} \delta_s = \frac{1 - r^2 - 2hri}{\{1 - r^2\}^2 + 4h^2 r^2} \delta_s \\ &= \frac{(1 - r^2)/\sqrt{(1 - r^2)^2 + 4h^2 r^2} + i(-2hr)/\sqrt{(1 - r^2)^2 + 4h^2 r^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + 4h^2 r^2}} \delta_s \end{aligned}$$

$$\therefore C = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\sqrt{\{1 - r^2\}^2 + 4h^2 r^2}} \delta_s = \frac{\delta_s}{\sqrt{\{1 - r^2\}^2 + 4h^2 r^2}} e^{i\theta} = Ae^{i\theta} \quad (f)$$

$$\delta_s = \frac{F}{k}, \quad A = \frac{\delta_s}{\sqrt{\{1 - r^2\}^2 + 4h^2 r^2}} \quad (g)$$

$$\cos\theta = \frac{1 - r^2}{\sqrt{\{1 - r^2\}^2 + 4h^2 r^2}}, \quad \sin\theta = \frac{-2hr}{\sqrt{\{1 - r^2\}^2 + 4h^2 r^2}} \quad (h)$$

である。

式(f)を(d)に代入すると



$$z = Ae^{i\theta} e^{ipt} = Ae^{i(pt+\theta)} = A\{\cos(pt+\theta) + i\sin(pt+\theta)\} \quad (i)$$

である。最終的に求める一般解は、式(i)の虚部をとり

$$x(t) = A\sin(pt+\theta) \quad (j)$$

である。複素数を用いない解法(3.2節)に比べて、解が簡単に求まることがわかる。

振幅が 1 である調和外力  $e^{ipt}$  に対する定常振動の複素振幅  $C$  は、**伝達関数** (transfer function) とよばれる。それは、式(e)で  $F_0 = 1$  を代入した

$$H(ip) = \frac{1}{1-r^2+2hri} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{1-(p/\omega)^2+2h(p/\omega)i} \cdot \frac{1}{k} \quad (k)$$

である。伝達関数は、単位調和外力  $e^{ipt}$  に対する応答複素変位の振幅と位相の情報が含まれている。すなわち、それぞれ、絶対値  $|H(ip)|$  と偏角  $\arg H(ip)$  である。多自由度系の伝達関数は、単位調和地盤加速度  $\ddot{z}_g = e^{ipt}$  に対する各節点の応答複素変位である。したがって、それは各節点で異なる。

## 第 5 部の参考文献

- [5.1] 表実, (2000), “キーポイント複素関数”, 岩波書店。
- [5.2] 表実, (2001), “複素関数”, 岩波書店。
- [5.3] 松平精, (1973), “基礎振動学”, 現代工学社。
- [5.4] 寺沢徳雄, (2000), “振動と波動”, 岩波書店。
- [5.5] 矢野健太郎・石原繁, (1994), “線形代数”, 裳華房。
- [5.6] 和達三樹, (2000), “物理のための数学”, 岩波書店。
- [5.7] 柴田明徳, (2000), “最新耐震構造解析”, 森北出版株式会社。
- [5.8] 矢嶋信男, (2000), “常微分方程式”, 岩波書店。

## 第6部 振動学と“フーリエ解析”

フーリエ解析とは、ある関数を調和関数成分に分解し、それらの各成分の振動数と初期位相を求めることをいう。フーリエ解析で実務で最も用いられているのが、フーリエ・スペクトルである。これは非周期離散データのフーリエ変換である。これを正確に理解するには、①区分的に連続な周期関数(以降、周期関数)のフーリエ級数・フーリエ係数、②区分的に連続な非周期関数(以降、非周期関数)のフーリエ積分・フーリエ変換、③周期離散データのフーリエ級数・フーリエ係数、および④非周期的離散データのフーリエ積分・フーリエ変換、の順で学ぶ必要がある。なお、“区分的に連続”とは、関数が有限の不連続点を除いて連続で、不連続点の前後で極限值が存在することをいう。

フーリエ・スペクトルは、数学の本ではあまり記載されていない。振動学の本では、フーリエ変換についてわかりやすい解説がほとんどなされていない。特に、離散データのフーリエ変換は、特有な問題があるにもかかわらず、解説した本が非常に少ない。そのために、それらを学ぼうとする人は大変苦勞する。そこで、この本では、それらの解説にかなり紙面を割いた。しかし、フーリエ解析の入門者は、一度にすべてを読破することは大変で、また②まででフーリエ・スペクトルあるいはフーリエ変換の概念を十分把握できると思われるので、まず①と②をしっかりと理解し、③と④は後日に読んだ方がよいかもしれない。

この部では、まず、“周期関数のフーリエ係数・フーリエ級数”について、その概念を理解しやすいように、実数を用いて説明する。つぎに複素数を用いてそれを説明する。それ以降の説明は、すべて複素数を用いる。なぜならば、複素数を用いた方が、式が簡略になり見通しよくなるからである。

### 第18章 フーリエ解析

#### 18.1 周期関数の実フーリエ係数・実フーリエ級数

図 18.1 に示す時間  $t$  の関数  $f(t)$  が、周期  $T$  の周期関数であるとは

$$f(t+T) = f(t) \quad (18.1)$$

が  $-\infty < t < \infty$  で成り立つことである。その場合、以下のように、“周期関数の円

振動数  $\omega = 2\pi/T$  の正の整数倍”を円振動数とする調和振動成分に分解，すなわち無限三角級数に展開できる。

$$f(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t + \theta_1) + A_2 \cos(2\omega t + \theta_2) + \dots \quad (18.2)$$

ここで， $A_0$ は定数， $A_1, A_2, \dots$ と $\theta_1, \theta_2, \dots$ は，各調和振動成分の振幅と初期位相である。この実数の無限級数を**実フーリエ級数**という。なお，周期関数の独立変数は，時間である必要がないが，話を簡単にするために，ここでは時間とする。

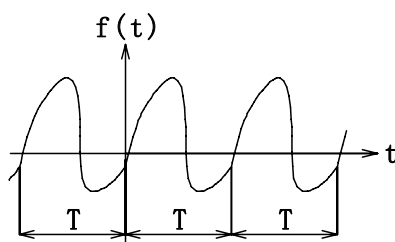


図 18.1 周期関数

### (1) 周期 $2\pi$ の関数の実フーリエ級数・実フーリエ係数

周期  $2\pi$  の関数  $f(t)$  が，区間  $[-\pi, \pi]$  で定義されているとする。周期  $T$  を  $2\pi$  にするのは，振動数  $\omega = 2\pi/T = 1\text{rad/s}$  となり，式が単純になるからである。また，定義区間を原点に対して対称にしたのは，計算に便利であるからである。これらのことは，変数変換によって，任意の周期および定義区間に置換できるので，一般性が失われていない。

この関数は，フーリエ級数に展開できる。すなわち

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (18.3)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (18.4)$$

あるいは

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt + \theta_n) \quad (18.5)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (n \text{ 次振動成分の振幅}) \quad (18.6)$$

$$\cos \theta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \sin \theta_n = \frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad (\theta_n \text{ は } n \text{ 次振動成分の初期位相}) \quad (18.7)$$

である。 $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ を**実フーリエ係数**という。定数の項  $a_0/2$  は平均値を意味している。 $A_1 \cos(t + \theta_1)$ を**基本振動成分(1次振動成分)**という。また、 $A_n \cos(nt + \theta_n)$ を**n次振動成分**といい、基本振動の  $n$  倍の振動数の振動成分を表している。

$n$  次振動成分  $A_n \cos(nt + \theta_n)$  は、 $n = 0, \theta_0 = 0$  とおくと

$$A_n \cos(nt + \theta_n) = A_n$$

定数となる。すなわち、定数項  $a_0/2$  は、振動数 0(周期無限大)あるいは 0 次の振動成分(振幅)と考えることができる。その初期位相は 0 である。紛らわしいが、定数項が  $1/2$  になっているのは、単にフーリエ係数をきれいに表現するために、習慣的なものである。0 次振動成分が  $\cos$  で表現されるので、式(18.5)において、他の振動成分も  $\cos$  で表現される必要がある。なぜならば、それぞれの振動成分が  $\cos$  あるいは  $\sin$  でまちまちに表現されたら、初期位相の意味が混乱してしまうからである。

ここで、式(18.4)を証明するために有効な**三角関数系の直交性**を説明しよう。

三角関数系とは

$$\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\} \quad (18.8)$$

をいう。三角関数系の直交性とは

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos ntdt = 0, & \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin ntdt = 0, & \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mtdt = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mtdt = 0 \quad (n \neq m), & \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mtdt = 0 \quad (n \neq m) \\ \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1dt = 2\pi, & \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ntdt = \pi, & \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 ntdt = \pi \end{cases} \quad (18.9)$$

式(18.9)の第 1 行と第 2 行のように、相異なる関数の積の積分が、0 となることをいう。この直交性があるから、フーリエ係数が簡単な形で表わせるのである。直交性とよばれるゆえんは、“2 つベクトルの内積が 0 の場合、それらのベクトルは直交する” ことからきている。式(18.9)の証明は容易であるので割愛する。

さて式(18.4)を証明しよう。式(18.3)に 1 を乗じて、 $-\pi \sim \pi$ 間を積分すると

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot f(t) dt = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos ntdt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin ntdt \right)$$

となる。右辺の第 2 項は、直交性から 0 となるので

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \pi a_0, \quad \therefore a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

となる。式(18.3)に  $\cos mt$  を乗じて、 $-\pi \sim \pi$ 間を積分すると

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mtdt = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos mtdt + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mtdt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mtdt \right)$$

となる。直交性から、右辺の“第 1 項” と “第 2 項の  $a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mtdt = a_m \pi$  以外” は 0 となるので

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mtdt = a_m \pi, \quad \therefore a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mtdt$$

となる。 $m$  は  $n$  に交換できるから、式(18.3)の第 1 式が証明された。式(18.4)の第 2 式は、式(18.3)に  $\sin mt$  を乗じることによって、同様に証明することができる。

### 例題 18.a 実フーリエ係数, 実フーリエ級数, 実フーリエ級数の部分和とフーリエ・スペクトル

簡単な周期関数について、5 次までのフーリエ係数、フーリエ級数の部分和とフーリエ・スペクトルを求めてみよう。

(1) 図 18.a(1)(a)に示す周期関数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq t < 0) \\ \pi & (0 \leq t < \pi) \end{cases} \quad (\text{a})$$

のフーリエ係数  $a_n$  と  $b_n$  は式(18.4)より

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi dt = [t]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \cos ntdt = \frac{1}{n} [\sin nt]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \sin ntdt = -\frac{1}{n} \left[ \cos nt \right]_0^{\pi}$$

$$= \begin{cases} 2/n & (n=2k-1) \\ 0 & (n=2k) \end{cases}$$

である。振動成分の振幅すなわち**フーリエ振幅**は

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + b_n^2} = b_n = \begin{cases} 2/n & (n=2k-1) \\ 0 & (n=2k) \end{cases}$$

である。したがって、フーリエ級数展開は

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + 2 \sin t + \frac{2}{3} \sin 3t + \frac{2}{5} \sin 5t + \dots$$

である。前記したように、各調和振動成分を比較するには、 $\cos$  で表現する必要があるから

$$f(t) = \frac{\pi}{2} \cos \left\{ 0 \cdot t + 0 \right\} + 2 \cos \left\{ 1 \cdot t + \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right\}$$

$$+ \frac{2}{3} \cos \left\{ 3t + \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right\} + \frac{2}{5} \cos \left\{ 5t + \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right\} + \dots \quad (\text{b})$$

である。図 18.a(1)(b)に、5次振動成分すなわち  $n=5$  までの部分  $\hat{f}(t)$  を示した。

(2) 図 18.a(2)(a)に示す周期関数  $g(t)$

$$g(t) = \begin{cases} \pi + t & (-\pi \leq t < 0) \\ \pi - t & (0 \leq t < \pi) \end{cases} \quad (\text{c})$$

と  $\cos nt$  は、偶関数(縦軸に対して線対称)であるので、その積  $g(t) \cos nt$  も偶関数である。したがって、 $g(t) \cos nt$  の  $-\pi \sim \pi$  間の積分は、 $0 \sim \pi$  までの積分を2倍すればよい。フーリエ係数  $a_n$  は式(18.4)より

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) dt = \frac{2}{\pi} \left[ \pi t - \frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos ntdt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos ntdt$$

である。これに対して、部分積分法を用いると

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\pi-t}{n} \sin nt \right]_0^\pi + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin nt dt$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left[ -\frac{1}{n} \cos nt \right]_0^\pi = \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi} & (n=2k-1) \\ 0 & (n=2k) \end{cases}$$

である。 $g(t)$ と $\sin nt$ は、それぞれ偶関数と奇関数(原点に対して点対称)であるので、その積 $f(t)\sin nt$ は奇関数である。ゆえに、 $g(t)\sin nt$ の $-\pi \sim \pi$ 間の積分は0となるので、 $b_n$ は式(18.4)より0である。また、フーリエ振幅 $A_n$ は、 $b_n=0$ であるから $a_n$ に等しい。したがって、フーリエ級数は

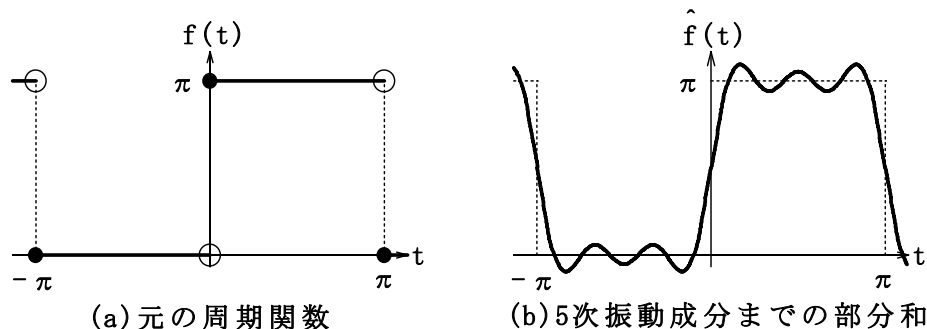
$$g(t) = \frac{4}{\pi} \cos t + \frac{4}{9\pi} \cos 3t + \frac{4}{25\pi} \cos 5t + \dots \quad (d)$$

である。図 18.a(2)(b)に、5次振動成分すなわち $n=5$ までの部分 $\hat{g}(t)$ を示した。

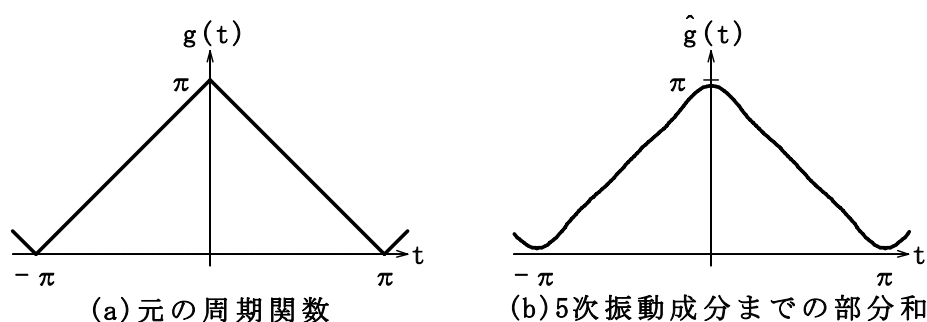
図 18.a(1)(b)と図 18.a(2)(b)を比較すると、滑らかな関数の方が、フーリエ級数の収束性が速いことがわかる。

2つの例題の1次、3次と5次の調和振動成分を、図 18.a(3)(a)に示した。なお2次と4次の振動成分は0である。図 18.a(3)(b)に、 $n$ 次の振動成分の円振動数 $\omega_n = n$ に対する振幅 $A_n$ の関係を示した。これを**フーリエ振幅スペクトル**(Fourier amplitude spectrum)という。フーリエ振幅の大きい振動成分の周期を**卓越周期**(predominant period)とよぶ。初期位相のスペクトルを**フーリエ位相スペクトル**(Fourier phase spectrum)という。例題 18(1)の0次と1次以上の振動成分の初期位相は、式(b)よりそれぞれ0と $-\pi/2$ である。例題(2)の振動成分の初期位相はすべて0である。周期関数のスペクトルは線スペクトルである。

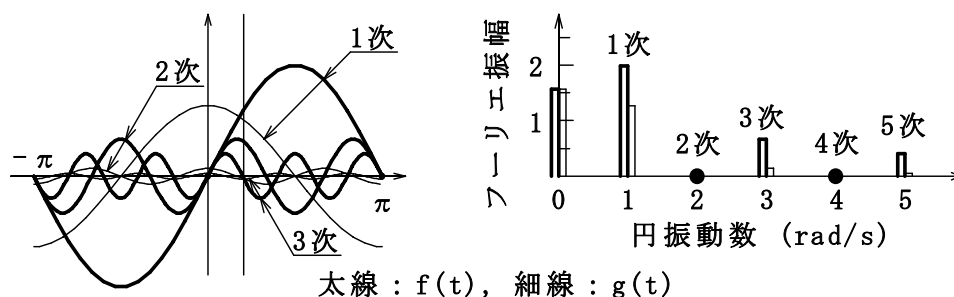
周期関数 $f(t)$ と $g(t)$ は、周期 $T$ 、最大値、最小値および平均値が等しい。図 18.a(3)(a)と 18a(3)(b)と比べるとわかるように、① $g(t)$ のように穏やかに変化する周期関数は、低次の振動成分が大半を占める、②逆に、鋭く大きい谷と山が多く含まれる場合は、高次の振動成分まで振幅が大きい、③ $f(t)$ のように最大値あるいは最小値の継続時間の長い方が振動成分の振幅が大きい(図 18.a(3)(a)と(b)の $f(t)$ と $g(t)$ のそれぞれの1次振動成分を比較)。



(1)  $f(t) = 0 (-\pi \leq t < 0), f(t) = \pi (0 \leq t < \pi)$



(2)  $g(t) = t + \pi (-\pi \leq t < 0), g(t) = -t + \pi (0 \leq t < \pi)$



(3)  $f(t)$  と  $g(t)$  のフーリエ解析の比較

図18.a フーリエ級数の部分 and, 調和振動成分とフーリエ・スペクトル

フーリエ解析は、振動数(周波数)に対する解析であるので、**周波数領域** (frequency domain)の解析とよばれる。それに対して、通常の時間に対する解析を**時間領域**(time domain)の解析という。元の周期関数とフーリエ係数は、完全に1対1に対応する。すなわち、フーリエ係数からフーリエ級数によって元



の周期関数を逆に求めることができる。

## (2) 一般の周期 $T$ の関数の実フーリエ級数・実フーリエ係数

周期  $T$  の関数  $f(t)$  が、区間  $[-T/2, T/2]$  あるいは  $[0, T]$  で定義されているとする。(1)項の周期  $2\pi$  を  $T$  に置き換えて、積分区間  $[-\pi, \pi]$  を  $[-T/2, T/2]$  あるいは  $[0, T]$  にすればよいから、フーリエ級数とフーリエ係数は、式(18.3)・(18.4)より

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (18.10)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (18.11)$$

あるいは

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (18.12)$$

である。

## 18.2 周期関数の複素フーリエ係数・複素フーリエ級数

区間  $[-T/2, T/2]$  で定義される周期  $T$  の関数  $f(t)$  の実フーリエ級数(式(18.10))を複素数で表示することを考える。オイラーの公式(式(17.11))

$$e^{in\omega t} = \cos n\omega t + i \sin n\omega t, \quad e^{-in\omega t} = \cos n\omega t - i \sin n\omega t \quad (18.13)$$

を  $\cos n\omega t, \sin n\omega t$  について解くと

$$\cos n\omega t = \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2}, \quad \sin n\omega t = -\frac{ie^{in\omega t} - ie^{-in\omega t}}{2} \quad (18.14)$$

となる。これを式(18.10)に代入すると

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} - b_n \frac{ie^{in\omega t} - ie^{-in\omega t}}{2} \right)$$

$$\therefore f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n + b_n i) e^{-in\omega t} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - b_n i) e^{in\omega t} \quad (18.15)$$

となる。

ここで、**複素フーリエ係数**  $c_n$

$$c_n \equiv \frac{1}{2}(a_n - b_n i) \quad (18.16)$$

を導入する。これに式(18.11)を代入すると

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) (\cos n\omega t - i \sin n\omega t) dt \quad (18.17)$$

$$\therefore c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (18.18)$$

となる。

式(18.16)を(18.15)に代入すると、(18.15)の右辺の第3項は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - b_n i) e^{in\omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (18.19)$$

となる。式(18.15)の右辺の第1項は、 $n = -N$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + b_n i) e^{-in\omega t} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_{-N} + b_{-N} i) e^{iN\omega t} \quad (18.20)$$

となる。フーリエ係数 $a_{-N}$ 、 $b_{-N}$ は、式(18.11)より

$$a_{-N} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(-N\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos N\omega t dt = a_N \quad (18.21)$$

$$b_{-N} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(-N\omega t) dt = -\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin N\omega t dt = -b_N \quad (18.22)$$

である。これらを式(18.20)の右辺に代入すると

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + b_n i) e^{-in\omega t} &= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_N - b_N i) e^{iN\omega t} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + b_n i) e^{-in\omega t} &= \sum_{N=1}^{\infty} c_N e^{iN\omega t} \end{aligned}$$

となる。右辺の $N$ を $n$ に変えると下式となる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + b_n i) e^{-in\omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (18.23)$$

$n=0$ のフーリエ係数 $b_n$ は、式(18.12)から $b_n=0$ である。また、 $e^{i0\omega t}=1$ であるから、式(18.15)の右辺の第2項は

$$\frac{a_0}{2} = \frac{a_0 - b_0 i}{2} e^{i0\omega t} = c_0 e^{i0\omega t} \quad (18.24)$$

と表わせる。

式(18.19)・(18.23)・(18.24)を(18.15)に代入すると

$$f(t) = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n + c_0 e^{i0\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

$$\therefore f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (18.25)$$

となる。これらが**複素フーリエ級数**と複素フーリエ係数である。

区間 $[0, T]$ で定義される周期関数の場合は、複素フーリエ係数は

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (18.26)$$

である。

複素平面において、複素フーリエ級数の $m$ 次の項 $z_m = c_m e^{im\omega t}$ と複素フーリエ係数 $c_m$ の幾何学的意味を考えてみよう。ただし $m \geq 0$ とする。実フーリエ級数の $m$ 次の項は、式(18.5)・(18.6)・(18.7)より

$$x_m = a_m \cos m\omega t + b_m \sin m\omega t = A_m \cos(m\omega t + \theta_m) \quad (18.27)$$

$$A_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}, \quad \cos \theta = \frac{a_m}{A_m}, \quad \sin \theta = -\frac{b_m}{A_m} \quad (18.28)$$

である。

複素フーリエ級数の $m$ 次の項は、式(18.25)の第1式より

$$z_m = c_m e^{im\omega t} \quad (18.29)$$

である。複素フーリエ係数の式(18.16)に(18.28)を代入すると

$$c_m = \frac{1}{2}(a_m - b_m i) = \frac{1}{2} A_m \{\cos \theta_m + i \sin \theta_m\} = \frac{1}{2} A_m e^{i\theta_m} \quad (18.30)$$

となる。すなわち、複素フーリエ級数の項 $z_m$ と複素フーリエ係数 $c_m$ はそれぞれ複素変位と複素振幅である。

複素フーリエ級数の $-m$ 次の項は、式(18.25)の第1式より

$$z_{-m} = c_{-m} e^{-im\omega t} \quad (18.31)$$

である。複素フーリエ係数は、式(18.21)・(18.22)より

$$\begin{aligned}
 c_{-m} &= \frac{1}{2}(a_{-m} - b_{-m}i) = \frac{1}{2}(a_m + b_m i) = \frac{1}{2}A_m \{\cos \theta_m - i \sin \theta_m\} \\
 &= \frac{1}{2}A_m \{\cos(-\theta_m) + i \sin(-\theta_m)\} = \frac{1}{2}A_m e^{-i\theta_m}
 \end{aligned}
 \tag{18.32}$$

である。

式(18.29)と(18.31)にそれぞれ(18.30)と(18.32)を代入すると

$$\begin{aligned}
 z_m &= \frac{1}{2}A_m e^{i\theta_m} \cdot e^{im\omega t} = \frac{1}{2}A_m e^{i(m\omega t + \theta_m)} \\
 \therefore z_m &= \frac{1}{2}A_m \{\cos(m\omega t + \theta_m) + i \sin(m\omega t + \theta_m)\}
 \end{aligned}
 \tag{18.33}$$

$$\begin{aligned}
 z_{-m} &= \frac{1}{2}A_m e^{-i\theta_m} \cdot e^{-im\omega t} = \frac{1}{2}A_m e^{-i(m\omega t + \theta_m)} \\
 \therefore z_{-m} &= \frac{1}{2}A_m \{\cos(m\omega t + \theta_m) - i \sin(m\omega t + \theta_m)\} \\
 &= \frac{1}{2}A_m [\cos\{-m\omega t + (-\theta_m)\} + i \sin\{-m\omega t + (-\theta_m)\}]
 \end{aligned}
 \tag{18.34}$$

となる。すなわち、複素フーリエ級数の  $m$  次の項  $z_m$  と  $-m$  次の項  $z_{-m}$  は、共役複素数の関係にある。それらを合計

$$z_m + z_{-m} = A_m \cos(m\omega t + \theta_m) = x_m
 \tag{18.35}$$

は実フーリエ級数の  $m$  次の項・式(18.27)と一致する。

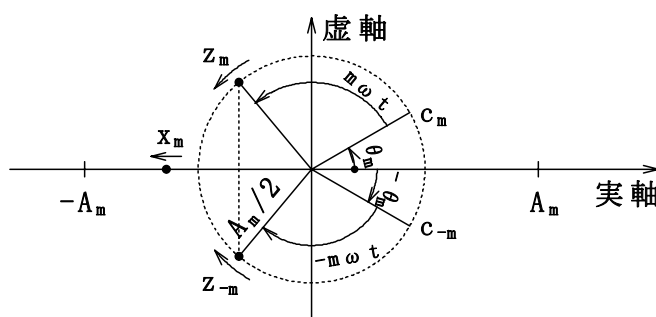


図18.2 複素フーリエと実フーリエの複素平面上の関係

図 18.2 は、複素フーリエ級数の  $m$  次の項  $z_m$ 、 $-m$  次の項  $z_{-m}$  と実フーリエ級数の  $m$  次の項  $x_m$  を複素平面に描いた図である。図に示すように、 $z_m$  と  $z_{-m}$  は、

円振動数  $\omega \cdot$  半径  $A_m$  で、それぞれ初期位相  $\theta$  と  $-\theta$  から正方向と負方向に原点を中心として回転する。それらに対応して、 $x_m = z_m + z_{-m}$  は、実軸上の  $[-A_m, A_m]$  の範囲を調和振動している。複素フーリエ級数のよう誘導からわかるように、共役複素数関係にある  $z_m, z_{-m}$  は、 $x_m$  から分離したものであり、常に一体なものである。以上の関係を理解していれば、実フーリエより複素フーリエの方が、解析上ではるかに便利である。

### 例題 18.b 複素フーリエ係数、複素フーリエ級数とフーリエ・スペクトル

例題 18.a(1)(図 18(1)(a))について複素数を用いて解いてみよう。複素フーリエ係数  $c_n$  は式(18.25)より

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \pi dt = \frac{1}{2} [t]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \pi e^{-int} dt = -\frac{1}{2ni} \left[ e^{-int} \right]_0^\pi = \frac{i}{2n} (e^{-in\pi} - 1)$$

$$\therefore c_n = \begin{cases} -\frac{i}{n} & \left\{ \begin{array}{l} (1/-n)(\cos \pi/2 + i \sin \pi/2) = (1/-n) e^{i\pi/2} \quad (n = 2k - 1 < 0) \\ (1/n) \{ \cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2) \} = (1/n) e^{-i\pi/2} \quad (n = 2k - 1 > 0) \end{array} \right. \\ 0 & (n = 2k) \end{cases}$$

である。したがって、複素フーリエ級数展開は

$$f(t) = \dots + \frac{1}{3} e^{\pi/2} e^{-3ti} + e^{\pi/2} e^{-ti} + \frac{\pi}{2} + e^{-\pi/2} e^{ti} + \frac{1}{3} e^{-\pi/2} e^{3ti} + \dots$$

$$\therefore f(t) = \dots + \frac{1}{3} e^{i(-3t+\pi/2)} + e^{i(-t+\pi/2)} + \frac{\pi}{2} + e^{i(t-\pi/2)} + \frac{1}{3} e^{i(3t-\pi/2)} + \dots \quad (\text{a})$$

である。複素フーリエ係数の絶対値と偏角すなわち振動成分の振幅と位相は

$$|c_0| = \frac{\pi}{2}, \quad |c_n| = \begin{cases} \frac{1}{|n|} & (n = 2k - 1) \\ 0 & (n = 2k) \end{cases}$$

$$\arg c_0 = 0, \quad \arg c_n = \begin{cases} \pi/2 & (n < 0) \\ -\pi/2 & (n > 0) \end{cases}$$

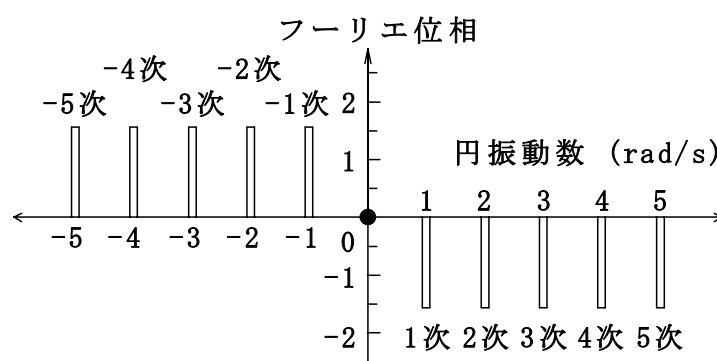
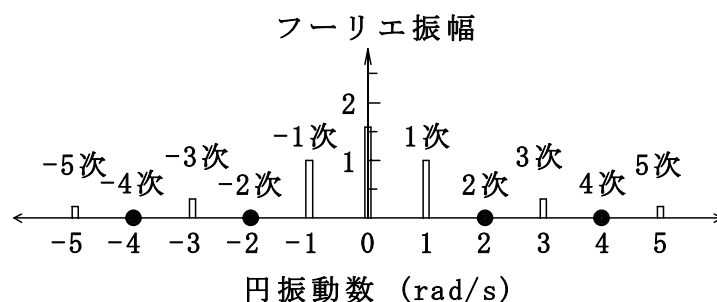
である。

図 18.b(a)に、複素フーリエ振幅スペクトルと複素フーリエ位相スペクトルを示す。それぞれ縦軸と原点に対して線対称である。“共役複素数関係にある複素振動成分  $z_n, z_{-n} (n > 0)$  を足し合わせた、すなわち実振動成分  $x_n$ ” の振幅  $A_n$  と位相  $(-\theta_n)$  のスペクトルを図 18.b(b)に示した。図からわかるように

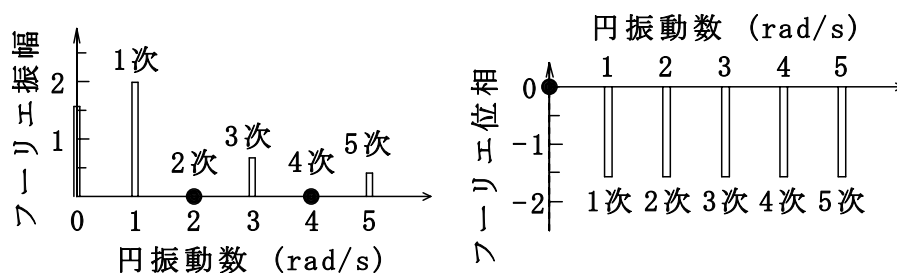
$$A_0 = |c_0|, \quad A_n = 2|c_n| \quad (n=1,2,\dots)$$

$$\theta_n = \arg c_n \quad (n=0,1,2,\dots)$$

である。



(a) 複素フーリエ・スペクトル



(b) 実フーリエ・スペクトル

図 18. b 振動成分とフーリエ・スペクトル

### 18.3 非周期関数のフーリエ変換・フーリエ積分

図 18.3(a)に示すような非周期関数  $f(t)$  の周波数特性すなわちフーリエ変換を考えよう。フーリエ変換がわかりにくい理由のひとつは、①  $\omega$  が、今までは基本振動成分の円振動数すなわち定数  $\omega = 2\pi/T$  として用いられてきたが、ここでは変数として用いられる、② 全体の変数と積分変数を共通の  $t$  が用いられる、などである。ここでは、それらの点を改善して解説する。

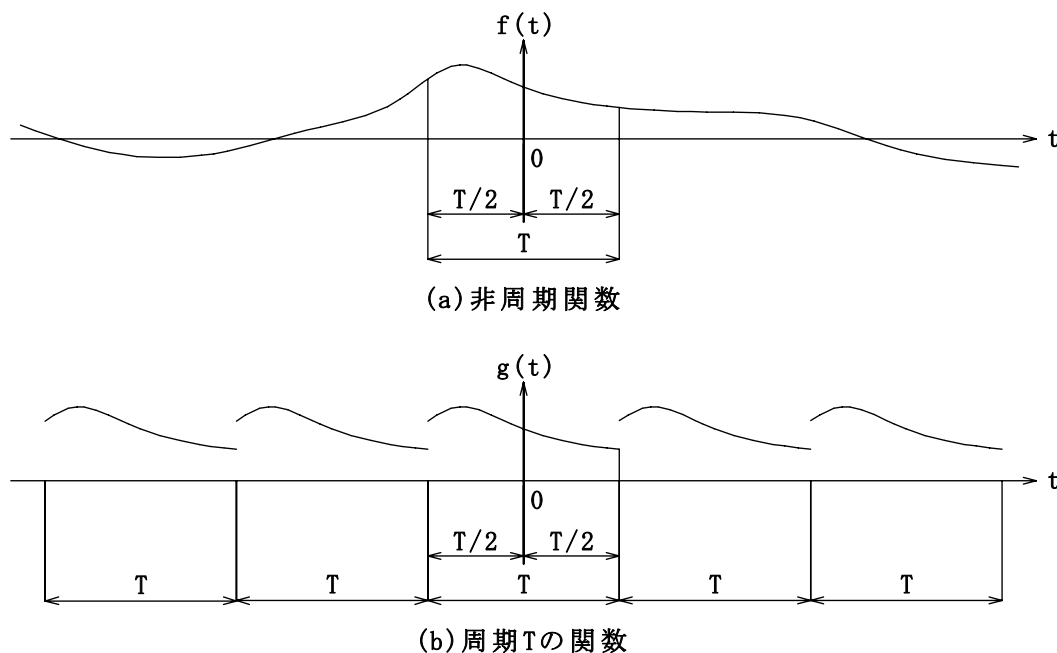


図 18.3 フーリエ変換の考え方

この関数は非周期的であるので、フーリエ級数・フーリエ係数の式(18.25)をそのままでは適用できない。そこで、図 18.3(b)に示すように、区間  $[-T/2, T/2]$  を切り取り、それが周期的に繰り返す関数  $g(t)$  を考える。そのフーリエ級数は、式(18.25)より

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-in\omega t} dt \quad (18.36)$$

である。これを上記の理由で、 $n\omega$  を  $\omega_n$  で表現すると

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_2 = 2 \times \frac{2\pi}{T}, \dots, \omega_n = n \times \frac{2\pi}{T}, \dots \quad (18.37)$$

である。ここで、 $\omega_n$  と  $\omega_{n+1}$  の差を

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T}, \quad \therefore \frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \tag{18.38}$$

と置くと、式(18.37)は

$$\omega_1 = \Delta\omega, \quad \omega_2 = 2\Delta\omega, \dots, \omega_n = n\Delta\omega, \dots \tag{18.39}$$

となる。

さらに、式(18.36)の積分変数  $t$  を  $u$  で表現すると、同式は

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(u) e^{-i\omega_n u} du \tag{18.40}$$

となる。式(18.40)の第1式を変形し、(18.38)を代入すると

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (Tc_n) \left( e^{i\omega_n t} \frac{1}{T} \right) \tag{18.41}$$

$$\therefore g(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega, \quad F(\omega_n) = Tc_n = \int_{-T/2}^{T/2} g(u) e^{-i\omega_n u} du \tag{18.42}$$

となる。

$T \rightarrow \infty$  にすると、式(18.38)より  $\Delta\omega \rightarrow 0$  となり、飛び飛びの変数  $\omega_n$  が連続の変数  $\omega$  になる。そして  $g(t) \rightarrow f(t)$  となるので、式(18.42)は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \Delta\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{18.43}$$

となる。

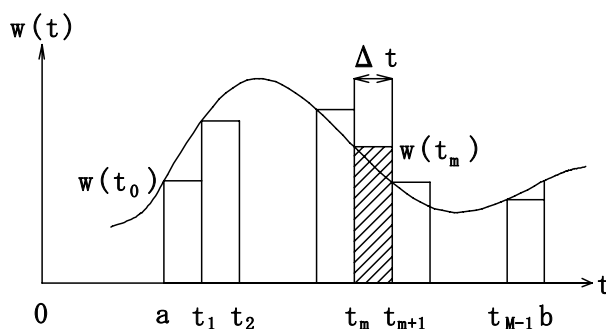


図18.4 定積分と積和

ここで、図18.4に示すような実関数  $w(t)$  の定積分を考える。区間  $[a, b]$  を  $M$  等分し、 $\Delta t = (b-a)/M$ 、 $t_m = a + m\Delta t$  とする。 $t_m \leq t \leq t_{m+1}$  において、 $w(t)$  が一定  $w(t_m)$  と仮定すると、その帯状の面積の  $a \sim b$  間における合計(積和)は、 $a \sim b$



間の定積分の近似である。すなわち

$$\sum_{m=0}^{M-1} w(t_m) \Delta t \approx \int_a^b w(t) dt$$

である。さらに、 $M \rightarrow \infty$ にすると、積和は定積分と一致する。

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{M-1} w(t_m) \Delta t = \int_a^b w(t) dt \quad (18.44)$$

$w(t)$  が複素数の場合も、実部と虚部それぞれの積和の極限も定積分に一致するから式(18.43)の第1式は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \quad (18.45)$$

となる。この式の第1式と第2式を、それぞれ**フーリエ積分**と**フーリエ変換**という。フーリエ積分は、式の誘導からわかるように、周期関数のフーリエ級数が非周期関数において変化したものである。 $\omega$ は、フーリエ級数でとびとびの値 $\omega_n$ をとるのに対して、フーリエ積分では連続変数である。したがって、周期関数のフーリエ・スペクトルが線スペクトルであるのに対して、非周期関数のそれは**連続スペクトル**である。

フーリエ変換はフーリエ係数と同じ意味合いを持っているが、少し異なる。その点について考察してみよう。フーリエ係数は、式(18.40)より

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

である。 $T \rightarrow \infty$ にすると $c_n = 0$ となってしまう。そこで、式(18.42)に示すように、 $c_n$ に周期 $T$ を乗じたのがフーリエ変換である。フーリエ係数 $c_n$ は、周期関数の周波数(振動数)特性を表している。すなわち、調和振動成分に分解したときの各成分の振幅と位相を表している。それに対して、フーリエ変換は、 $\lim_{T \rightarrow \infty} T c_n$ であるから、非周期関数の周波数特性を表している。ディメンジョンは、加速度の場合、フーリエ係数は $m/s^2$ (Gal)であるのに対して、フーリエ変換は $m/s(\text{Gal} \cdot m)$ である。

非周期関数 $f(t)$ とフーリエ変換 $F(\omega)$ も一対一に対応している。すなわち、 $f(t)$ から $F(\omega)$ を求めることをフーリエ変換といい、逆に $F(\omega)$ からフーリエ積分によって $f(t)$ を求めることを**フーリエ逆変換**という。

**例題 18.c フーリエ変換とフーリエ・スペクトル**

非周期関数(図 18.a(1)を参照)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0, t > \pi) \\ \pi & (0 \leq t \leq \pi) \end{cases} \quad (\text{a})$$

のフーリエ変換とフーリエ・スペクトルを求めよう。この関数は例題 18.a(1)すなわち例題 18.b の周期関数と  $-\pi \leq t < \pi$  で一致する。

フーリエ変換  $F(\omega)$  は、式(18.45)の第 2 式より

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = \int_0^{\pi} \pi du = \pi [u]_0^{\pi} = \pi^2$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du = \int_0^{\pi} \pi e^{-i\omega u} du = -\frac{\pi}{i\omega} \left[ e^{-i\omega u} \right]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{\omega} e^{-i\pi/2} (e^{-i\pi\omega} - 1)$$

$$\therefore F(\omega) = -\frac{\pi}{\omega} e^{-i\pi/2} \{(\cos \pi\omega - 1) - i \sin \pi\omega\} \quad (\text{b})$$

である。フーリエ変換の絶対値は

$$|F(\omega)| = \left| \frac{\pi}{\omega} \right| \sqrt{(\cos \pi\omega - 1)^2 + \sin^2 \pi\omega} = \left| \frac{\pi}{\omega} \right| \sqrt{\cos^2 \pi\omega - 2 \cos \pi\omega + 1 + \sin^2 \pi\omega}$$

$$\therefore |F(\omega)| = \left| \frac{\pi}{\omega} \right| \sqrt{2(1 - \cos \pi\omega)} \quad (\text{c})$$

である。

フーリエ・スペクトル  $|F(\omega)|$  を図 18.c(a)に示した。これは縦軸に対して線対称である。図には、例題 18.b の  $|c_n|$  に周期  $T = 2\pi$  を乗じたスペクトルも併記した。 $|c_n|$  の存在する位置で、 $T|c_n|$  と  $|F(\omega)|$  は一致する。これは、この非周期関数が、 $-2\pi \leq t < 2\pi$  で例題 18.a(1)の周期関数と一致し、 $t < -2\pi, t \geq 2\pi$  で 0 であるからである。

図 18.c(b)に、実数のフーリエ・スペクトルを示した。そのスペクトルの大きさは

$$\begin{cases} |F(\omega)|, T|c_n| & (\omega = 0) \\ 2|F(\omega)|, 2T|c_n| & (\omega \neq 0) \end{cases}$$

である。したがって、 $\omega=0$ で $|F(\omega)|$ は不連続である。

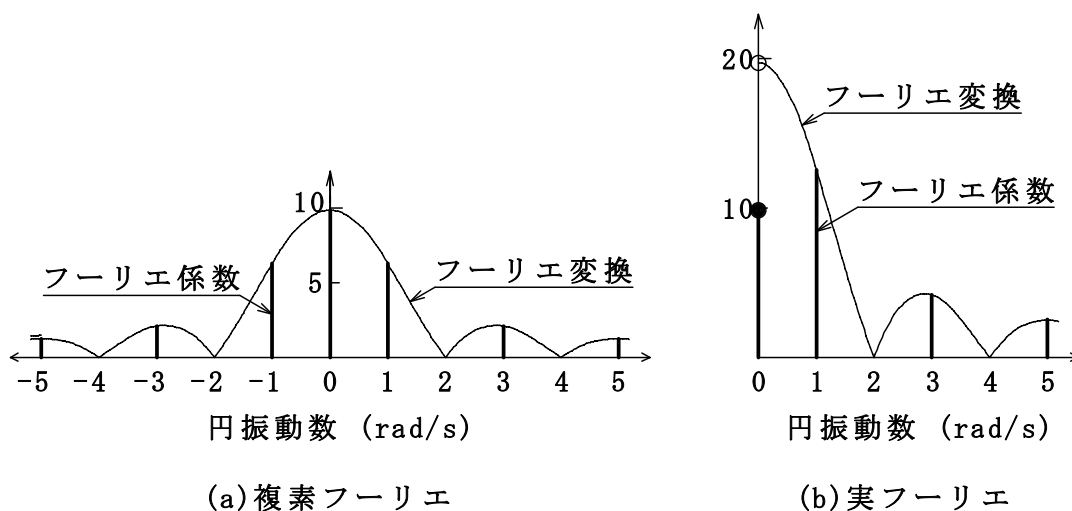


図 18. c フーリエ・スペクトル

### 18.4 離散データのフーリエ係数・フーリエ級数，フーリエ変換・フーリエ積分と高速フーリエ変換

#### (1) 周期離散データのフーリエ係数・フーリエ級数

観測や実験で得られるデータが連続データであっても，コンピュータで処理するために，離散化した**サンプル値**にかえる必要がある。サンプリングする時間間隔  $\Delta t$  を**サンプリング周期**，その逆数  $1/\Delta t$  を**サンプリング周波数**とよぶ。

周期  $T$  の関数  $f(t)$  が，区間  $[0, T]$  で定義されているとする。  $T$  を  $M$  等分したサンプリング周期  $\Delta t = T/M$  の離散データを考える。その離散データを以下のように書き表す。話を単純にするために，  $M$  は偶数とする。

$$f_m = f(m\Delta t) = f(t_m) \quad (m = 0, 1, \dots, M-1) \tag{18.46}$$

フーリエ係数は，式(18.26)より

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt \tag{18.47}$$

である。この式で積分される関数  $f(t)e^{-i\omega_n t}$  は，  $t_m \leq t < t_{m+1}$  で一定と仮定すると，  $\omega_n = n \times 2\pi/T$  より，その時間区分で

$$f(t)e^{-i\omega_n t} \approx f_m e^{-i\omega_n t_m} = f_m e^{-i\omega_n m\Delta t} = f_m e^{-in \frac{2\pi}{T} m\Delta t} = f_m e^{-in \frac{2\pi}{M\Delta t} m\Delta t} = f_m e^{-i \frac{2m n \pi}{M}}$$

である。したがって、フーリエ係数・式(18.47)は、以下のように近似できる(図18.4を参照)。

$$\hat{c}_n = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{M-1} f_m e^{-i \frac{2mn\pi}{M}} \Delta t = \frac{1}{M\Delta t} \sum_{m=0}^{M-1} f_m e^{-i \frac{2mn\pi}{M}} \Delta t$$

$$\therefore \hat{c}_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f_m e^{-i \frac{2mn\pi}{M}} \quad (18.48)$$

これを離散データのフーリエ係数という。

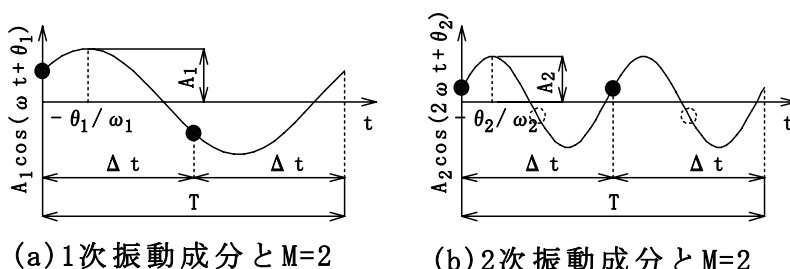


図18.5 ナイキスト振動数

離散データのフーリエ係数は、 $n$ のすべての整数について求まるようにみえるが、実は、 $-M/2 \leq n \leq M/2$ しか求まらない。それを実フーリエ級数で説明しよう。図18.5(a)と(b)は、それぞれ周期 $T$ の関数の1周期における1次振動成分と2次振動成分を示している。 $n$ 次の振動成分は、 $A_n \cos(\omega_n t + \theta_n)$ と表せるので、2つの未知数 $A_n, \theta_n$ が求まればそれが確定する。同図(a)に示す1次振動成分で、最小2つの離散データ( $M=2$ )があれば、それらの未知数が確定する。しかし、同図(b)に示す2次振動成分で $M=2$ の場合、図からわかるように、この振動成分の最初の1周期 $T/2$ に含まれるデータが1つしかないので、それらの未知数が確定しない( $M=4$ であれば確定する)。

したがって、 $n$ 次振動成分が確定するためには、 $M=2n$ を必要とする( $M$ を偶数とした理由)。すなわち、離散データから求めることができる最高次の振動成分の周期は、サンプリング周期 $\Delta t$ の2倍

$$T_y = 2\Delta t \quad (18.49)$$

である。また、それに対する振動数と円振動数は

$$f_y = \frac{1}{T_y} = \frac{1}{2\Delta t}, \quad \omega_y = 2\pi f_y = 2\pi \cdot \frac{1}{2\Delta t} = \frac{\pi}{\Delta t} \quad (18.50)$$

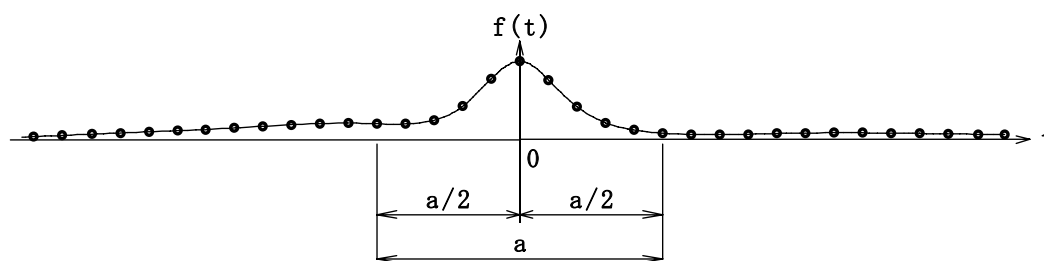
である。 $f_y$ をナイキスト振動数(Nyquist frequency)という。

したがって、離散データのフーリエ級数・フーリエ係数は、式(18.25)でナイキスト振動数すなわち $n \leq M/2$ を考慮して

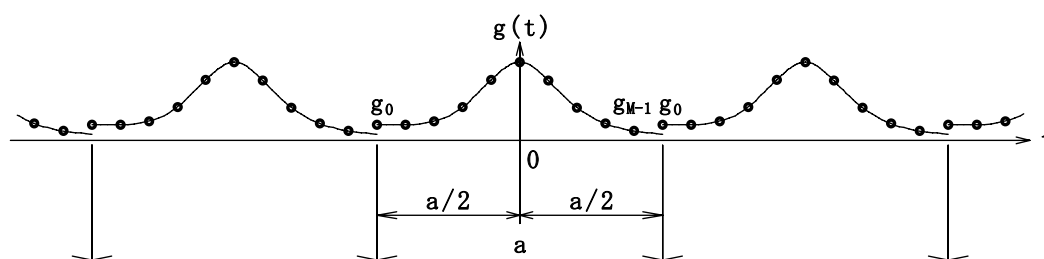
$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-M/2}^{M/2} \hat{c}_n e^{i \frac{2n\pi}{T} t}, \quad \hat{c}_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f_m e^{-i \frac{2mn\pi}{M}} \quad (n=0,1,\dots,M-1) \quad (18.51)$$

である。

## (2) 非周期離散データのフーリエ変換・フーリエ積分



(a) 非周期関数



(b) 周期 a の関数

図 18.6 非周期離散データのフーリエ変換の考え方

図 18.6(a)に示すような非周期関数  $f(t)$  のサンプリング周期  $\Delta t$  の離散データ  $f_m$  を考える。 $-\infty \sim \infty$  のデータを用いてフーリエ変換を計算することは、コンピュータでも不可能である。そこで、適当な区間  $[-a/2, a/2]$  を切り出し ( $a = M\Delta t$ )、その区間の周期特性によって“ $f_m$  のフーリエ変換”の代替とせざるを得ない。その周期特性は、 $[-a/2, a/2]$  を定義区間とした周期離散データ  $g_m$  の周期特性であるから、式(18.51)で  $T$  を  $a$  に置き換えた

$$\hat{g}(t) = \sum_{n=-M/2}^{M/2} \hat{c}_n e^{i \frac{2n\pi}{a} t}, \quad \hat{c}_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} g_m e^{-i \frac{2mn\pi}{M}} \quad (n=0,1,\dots,M-1)$$

である。これをフーリエ積分・フーリエ変換の形(式(18.41)・(18.42))に変える

と

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{a} \sum_{n=-M/2}^{M/2} (a\hat{c}_n) e^{i\frac{2n\pi}{a}t} \quad (n=0,1,\dots,M-1)$$

$$\therefore \begin{cases} \hat{g}(t) = \frac{1}{a} \sum_{n=-M/2}^{M/2} F(\omega_n) e^{i\frac{2n\pi}{a}t} \\ \hat{F}(\omega_n) = \frac{a}{M} \sum_{m=0}^{M-1} g_m e^{-i\frac{2m\pi}{M}t} = \Delta t \sum_{m=0}^{M-1} g_m e^{-i\frac{2m\pi}{M}t} \quad (n=0,1,\dots,M-1) \end{cases} \quad (18.53)$$

である。これらが非周期離散データのフーリエ積分とフーリエ変換である。

ナイキスト円振動数は、式(18.50)に  $\Delta t = a/M$  を代入すると

$$\omega_y = \frac{\pi}{\Delta t} = \frac{\pi M}{a} \quad (18.54)$$

である。したがって、非周期離散データのフーリエ変換は、 $\omega$ が $\Delta\omega$ の間隔の $\omega_n(n=0,1,\dots,M/2)$ に対してとびとびに求まる。ゆえに、離散データのフーリエ変換は、離散スペクトルすなわち線スペクトルとなるが、習慣的に折れ線グラフで表される。これが、われわれが良く見かける地震の地盤加速度などのフーリエ・スペクトルである。

離散データのフーリエ級数・フーリエ係数とフーリエ積分・フーリエ変換の式の誘導からわかるように、フーリエ級数とフーリエ積分は本質的に同じものであり、フーリエ係数とフーリエ変換も同様である。

### 例題 18.d 離散データのフーリエ係数、フーリエ変換とフーリエ・スペクトル

図 18.d(a)と(b)に示す、“周期離散データ  $f_m(T=2\pi, M=8)$ ”と“非周期離散データ  $g_m(a=4\pi, M=16)$ ”について、それぞれフーリエ係数とフーリエ変換を求め、フーリエ・スペクトルを描こう。

$f_m$ と $g_m$ のサンプリング周期は等しく $\Delta t = \pi/4$ であるので、ナイキスト円振動数は $\omega_y = \pi/\Delta t = 4$ である。

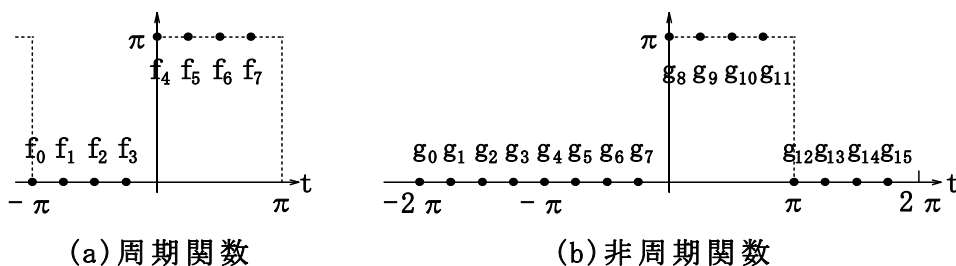
$f_m$ の調和振動成分の最高次数は、 $M/2 = 8/2 = 4$ である。各調和振動成分の円振動数は

$$\omega_1 = 2\pi/T = 2\pi/2\pi = 1, \quad \omega_2 = 2\omega_1 = 2, \quad \omega_3 = 3\omega_1 = 3, \quad \omega_4 = 4\omega_1 = 4$$

である。フーリエ係数  $\hat{c}_n$  は、式(18.51)より

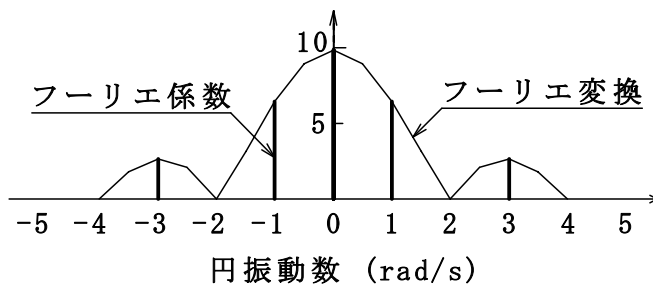
$$\hat{c}_0 = \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{8-1} f_m = \frac{1}{8} \sum_{m=4}^7 \pi = \frac{1}{8} \cdot 4\pi = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore |\hat{c}_0| = \frac{\pi}{2}$  (例題 18.b に示す厳密解と一致)



(a) 周期関数

(b) 非周期関数



(c) 複素フーリエ・スペクトル

図 18. d 離散データのフーリエ・スペクトル

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &= \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{8-1} f_m e^{-i \frac{2 \cdot 1 m \pi}{8}} = \frac{\pi}{8} \sum_{m=4}^7 e^{-i \frac{m \pi}{4}} = \frac{\pi}{8} \left( e^{-i \frac{4 \pi}{4}} + e^{-i \frac{5 \pi}{4}} + e^{-i \frac{6 \pi}{4}} + e^{-i \frac{7 \pi}{4}} \right) \\ &= \frac{\pi}{8} \left\{ -1 + i(1 + \sqrt{2}) \right\} \end{aligned}$$

$\therefore |\hat{c}_1| = \frac{\pi}{8} \sqrt{1 + (1 + \sqrt{2})^2} = 1.03$  (厳密解は1)

$$\hat{c}_2 = \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{8-1} f_m e^{-i \frac{2 \cdot 2 m \pi}{8}} = \frac{\pi}{8} \sum_{m=4}^7 e^{-i \frac{m \pi}{2}} = \frac{\pi}{8} \left( e^{-i \frac{4 \pi}{2}} + e^{-i \frac{5 \pi}{2}} + e^{-i \frac{6 \pi}{2}} + e^{-i \frac{7 \pi}{2}} \right) = 0$$

$\therefore |\hat{c}_2| = 0$  (厳密解は0)

$$\begin{aligned}\hat{c}_3 &= \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{8-1} f_m e^{-i\frac{2\cdot 3m\pi}{8}} = \frac{\pi}{8} \sum_{m=4}^7 e^{-i\frac{3m\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} \left( e^{-i\frac{12\pi}{4}} + e^{-i\frac{15\pi}{4}} + e^{-i\frac{18\pi}{4}} + e^{-i\frac{21\pi}{4}} \right) \\ &= \frac{\pi}{8} \left\{ (\sqrt{2}-1) - i \right\}\end{aligned}$$

$$\therefore |\hat{c}_3| = \frac{\pi}{8} \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 + 1} = 0.425 \quad (\text{厳密解は } 0.333)$$

$$\hat{c}_4 = \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{8-1} f_m e^{-i\frac{2\cdot 4m\pi}{8}} = \frac{\pi}{8} \sum_{m=4}^7 e^{-im\pi} = \frac{\pi}{8} \left( e^{-i(4\pi)} + e^{-i(5\pi)} + e^{-i(6\pi)} + e^{-i(7\pi)} \right) = 0$$

$$\therefore |\hat{c}_4| = 0 \quad (\text{厳密解と一致})$$

である。離散データのフーリエ係数は、高次になるほど厳密解に対して誤差が大きくなるのがわかる。これは、振動成分の1周期に対するデータ数が少なくなるからである。

$g_m$  の調和振動成分の最高次数は  $M/2 = 16/2 = 8$  である。各調和振動成分の円振動数は

$$\begin{cases} \omega_1 = 2\pi/a = 2\pi/4\pi = 0.5, & \omega_2 = 2\omega_1 = 1, & \omega_3 = 3\omega_1 = 1.5, & \omega_4 = 4\omega_1 = 2 \\ \omega_5 = 5\omega_1 = 2.5, & \omega_6 = 6\omega_1 = 3, & \omega_7 = 7\omega_1 = 3.5, & \omega_8 = 8\omega_1 = 4 \end{cases}$$

である。フーリエ変換  $\hat{F}(\omega_n)$  は、式(18.53)より

$$F(\omega_0) = F(0) = \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^{16-1} g_m = \frac{\pi}{4} \sum_{m=8}^{11} \pi = \frac{\pi}{4} \cdot 4\pi = \pi^2, \quad \therefore |F(0)| = \pi^2$$

$$\begin{aligned}F(\omega_1) &= F(0.5) = \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^{16-1} g_m e^{-i\frac{2\cdot 1m\pi}{16}} = \frac{\pi}{4} \sum_{m=8}^{11} \pi e^{-i\frac{m\pi}{8}} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \left( e^{-i\frac{8\pi}{8}} + e^{-i\frac{9\pi}{8}} + e^{-i\frac{10\pi}{8}} + e^{-i\frac{11\pi}{8}} \right) = \frac{\pi^2}{4} (-3.0137 + 2.0137i)\end{aligned}$$

$$\therefore |F(\omega_1)| = \frac{\pi^2}{4} \sqrt{3.0137^2 + 2.0137^2} = 8.943$$

$$\begin{aligned}F(\omega_2) &= F(1) = \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^{16-1} g_m e^{-i\frac{2\cdot 2m\pi}{16}} = \frac{\pi}{4} \sum_{m=8}^{11} \pi e^{-i\frac{m\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \left( e^{-i\frac{8\pi}{4}} + e^{-i\frac{9\pi}{4}} + e^{-i\frac{10\pi}{4}} + e^{-i\frac{11\pi}{4}} \right) = \frac{\pi^2}{4} (1 - 2.4142i)\end{aligned}$$

$$\therefore |F(\omega_2)| = \frac{\pi^2}{4} \sqrt{1^2 + 2.4142^2} = 6.447$$



$$\begin{aligned} F(\omega_3) &= F(1.5) = \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^{16-1} g_m e^{-i \frac{2 \cdot 3 m \pi}{16}} = \frac{\pi}{4} \sum_{m=8}^{11} \pi e^{-i \frac{3 m \pi}{8}} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \left( e^{-i \frac{24 \pi}{8}} + e^{-i \frac{27 \pi}{8}} + e^{-i \frac{30 \pi}{8}} + e^{-i \frac{33 \pi}{8}} \right) = \frac{\pi^2}{4} (0.2483 + 1.2483i) \end{aligned}$$

$$\therefore |F(\omega_3)| = \frac{\pi^2}{4} \sqrt{0.2483^2 + 1.2483^2} = 3.140$$

$$\begin{aligned} F(\omega_4) &= F(2) = \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^{16-1} g_m e^{-i \frac{2 \cdot 4 m \pi}{16}} = \frac{\pi}{4} \sum_{m=8}^{11} \pi e^{-i \frac{m \pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \left( e^{-i \frac{8 \pi}{2}} + e^{-i \frac{9 \pi}{2}} + e^{-i \frac{10 \pi}{2}} + e^{-i \frac{11 \pi}{2}} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore |F(\omega_4)| = 0$$

$$\begin{aligned} F(\omega_5) &= F(2.5) = \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^{16-1} g_m e^{-i \frac{2 \cdot 5 m \pi}{16}} = \frac{\pi}{4} \sum_{m=8}^{11} \pi e^{-i \frac{5 m \pi}{8}} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \left( e^{-i \frac{40 \pi}{8}} + e^{-i \frac{45 \pi}{8}} + e^{-i \frac{50 \pi}{8}} + e^{-i \frac{55 \pi}{8}} \right) = \frac{\pi^2}{4} (-0.8291 - 0.1709i) \end{aligned}$$

$$\therefore |F(\omega_5)| = \frac{\pi^2}{4} \sqrt{0.8291^2 + 0.1709^2} = 2.089$$

$$\begin{aligned} F(\omega_6) &= F(3) = \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^{16-1} g_m e^{-i \frac{2 \cdot 6 m \pi}{16}} = \frac{\pi}{4} \sum_{m=8}^{11} \pi e^{-i \frac{3 m \pi}{4}} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \left( e^{-i \frac{24 \pi}{4}} + e^{-i \frac{27 \pi}{4}} + e^{-i \frac{30 \pi}{4}} + e^{-i \frac{33 \pi}{4}} \right) = \frac{\pi^2}{4} (1 - 0.4142i) \end{aligned}$$

$$\therefore |F(\omega_6)| = \frac{\pi^2}{4} \sqrt{1^2 + 0.4142^2} = 2.671$$

$$\begin{aligned} F(\omega_7) &= F(3.5) = \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^{16-1} g_m e^{-i \frac{2 \cdot 7 m \pi}{16}} = \frac{\pi}{4} \sum_{m=8}^{11} \pi e^{-i \frac{7 m \pi}{8}} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \left( e^{-i \frac{56 \pi}{8}} + e^{-i \frac{63 \pi}{8}} + e^{-i \frac{70 \pi}{8}} + e^{-i \frac{77 \pi}{8}} \right) = \frac{\pi^2}{4} (-0.4005 + 0.5995i) \end{aligned}$$

$$\therefore |F(\omega_7)| = \frac{\pi^2}{4} \sqrt{0.4005^2 + 0.5995^2} = 1.779$$

$$\begin{aligned}
 F(\omega_8) &= F(4) = \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^{16-1} g_m e^{-i \frac{2 \cdot 8 m \pi}{16}} = \frac{\pi}{4} \sum_{m=8}^{11} \pi e^{-i m \pi} \\
 &= \frac{\pi^2}{4} \left( e^{-i(8\pi)} + e^{-i(9\pi)} + e^{-i(10\pi)} + e^{-i(11\pi)} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore |F(\omega_8)| = 0$$

である。

図 18.d(c)に  $\hat{c}_n$  と  $\hat{F}(\omega_n)$  のフーリエ・スペクトルを示す。 $\hat{c}_n$ には周期  $T = 2\pi$  を乗じてある。離散データのフーリエ変換  $\hat{F}(\omega_n)$  は、習慣に従って折れ線で示した。

### (3) 高速フーリエ変換

フーリエ変換は、サンプリング周期  $\Delta t (= a/M)$  を小さくすれば、短周期の調和振動成分の周期特性まで求めることができる。また、 $a$  を大きくすれば、 $\Delta\omega$  を小さくすることができる。しかし、データが多くなると、フーリエ変換の計算は、普通の方法では大変に時間がかかる。そのためにさまざまな工夫が行なわれてきた。1965年、クーリィ(J.W.Cooley)らが、非常に高速でフーリエ変換を計算する画期的な方法を開発した。これが、**高速フーリエ変換**(fast Fourier transform, FFT)で、現在、地震加速度のフーリエ変換の計算に一般に用いられている。これについては詳しく述べないが、計算できる条件は、データ数  $M$  が  $2^n$  の場合である。したがって、 $M = 2^n$  となるように、0のデータを付け加える必要がある。

動的解析プログラムのフーリエ・スペクトルは、通常、実フーリエ・スペクトルではなく、複素フーリエ・スペクトルの振動数が正の部分である。

## 第6部の参考文献

- [6.1] 船越満明, (2000), “キーポイント・フーリエ解析”, 岩波書店。
- [6.2] 矢野健太郎・石原繁, (1994), “基礎解析学”, 裳華房。
- [6.3] 和達三樹, (2000), “物理のための数学”, 岩波書店。
- [6.4] 松平精, (1973), “基礎振動学”, 現代工学社。

- [6.5] 大崎順彦, (2000), “新・地震動のスペクトル解析入門”, 鹿島出版会。
- [6.6] 大石進一, (1999), “フーリエ解析”, 岩波書店。
- [6.7] 和達三樹, (1998), “微分積分”, 岩波書店。

## 第 7 部 振動学と“標準形固有値問題”

固有値解析は、モード解析における最も重要な部分である。しかし、ここま  
で、この本を読んできた真摯な読者は、それについて、いくつかの釈然としな  
い思いが残っているのではないだろうか。たとえば、“モードベクトルの直交性  
といっても、質量や剛性マトリックスがはさまれているのはなぜか”あるいは  
“正規化とは一般化質量を 1 とするようにモードベクトルの成分を設定するこ  
とであるが、もっと具体性のある物理的あるいは幾何学的な説明がないのか”  
などである。それらの疑問に答えるために、この章では、“数学的に抽象化され  
た標準形固有値問題”を説明する。振動解析あるいは座屈解析の固有値問題は、  
コンピューターでは、この標準形に変換されて計算される。

### 第 19 章 標準形固有値問題

#### 19.1 直交座標変換の座標軸

$n$ 次元ベクトルの 1 次変換

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \{x\} = [T]\{u\} \quad (19.1)$$

すなわち

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \left[ \begin{Bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \vdots \\ t_{n2} \end{Bmatrix} \quad \cdots \quad \begin{Bmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \vdots \\ t_{nn} \end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

あるいは

$$\{x\} = [\{t\}_1 \quad \{t\}_2 \quad \cdots \quad \{t\}_n] \{u\} \quad (19.2)$$

は、第 8 章で述べたように、変換行列  $[T]$  が直交行列である場合、 $u_1 u_2 \cdots u_n$  座  
標系から  $x_1 x_2 \cdots x_n$  座標系への直交座標変換と考えることができる。習慣的に、

$x_1x_2 \cdots x_n$  座標系を元の座標系,  $u_1u_2 \cdots u_n$  座標系を新しい座標系とする。

$u_1u_2 \cdots u_n$  座標系と  $x_1x_2 \cdots x_n$  座標系の幾何学的な関係を求めよう。図 19.1 は、新しい座標系の  $u_1$  軸を元の座標系の  $x_1x_2$  平面の投影した図である。

$u_1$  軸の基本ベクトルを  $u_1u_2 \cdots u_n$  座標系の数ベクトルで表すと

$$\vec{e}_{u1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{19.3}$$

である。式(19.3)を(19.2)に代入すると、 $\vec{e}_{u1}$  を  $x_1x_2 \cdots x_n$  座標系で表した数ベクトルが求まる。

$$\vec{e}_{u1} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{Bmatrix} = \{t\}_1$$

すなわち、 $u_i$  軸の基本ベクトルを  $x_1x_2 \cdots x_n$  座標系で表した数ベクトルは、変換行列の  $i$  列ベクトルである。

$$\vec{e}_{ui} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{Bmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \vec{e}_{ui} = \{x\} = \{t\}_i \tag{19.4}$$

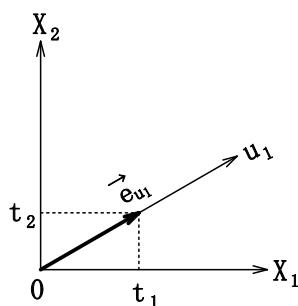


図 19.1 座標変換

## 19.2 標準形固有値問題

以降、2次元の固有値問題を論じるが、そのまま多次元に拡張できる。

**(1) 固有値問題の一般形と標準形**

物理上の固有値問題は、振動と座屈の現象において存在する。ここでは、振動の固有値問題を論じる。2自由度系の非減衰強制振動の運動方程式は、式(9.25)から減衰力を除いた

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

あるいは

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \quad (19.5)$$

である。なお、話を単純にするために、 $[M]$ はランプト・マスとした。

この連立微分方程式を連成しない方程式群に変換するため問題は、式(10.6)に示すように、以下の固有値問題に帰結する。

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad [K]\{\beta\} = \lambda[M]\{\beta\} \quad (19.6)$$

この固有値問題とは、“剛性マトリックス $[K]$ と質量マトリックス $[M]$ が与えられ、未知の固有値 $\lambda$ とモードベクトル $\{\beta\}$ を求める問題”である。話を明確にするために、式(19.6)と式(19.5)をそれぞれ**一般形固有値問題**と**一般形連立微分方程式**とよぶことにする。

しかし、数学上の固有値問題とは

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad [A]\{\phi\} = \lambda\{\phi\} \quad (19.7)$$

をいう。 $\lambda$ を行列 $[A]$ の固有値、 $\{\phi\}$ を固有値 $\lambda$ に対する $[A]$ の固有ベクトル、あるいは単純にそれぞれを行列 $[A]$ の固有値と固有ベクトルという。また、固有値問題を発生する連立微分方程式の問題は

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \{\ddot{x}\} + [A]\{x\} = \{b\} \quad (19.8)$$

である。式(19.7)と式(19.8)をそれぞれ**標準形固有値問題**と**標準形連立微分方程式**とよぶ。なお、数学では標準形固有値問題をただ“固有値問題”とよぶ。

幾何学的にみると、図 19.2 に示すように、一般形固有値問題は、 $\beta_1\beta_2$ 座標系において、ベクトル $\{\beta\}$ に対する“ $[K]$ の1次変換”と“ $[M]$ の1次変換の $\lambda$ 倍”が一致するように $\{\beta\}$ と $\lambda$ を定めることである。一方、標準形固有値問題

は、 $\phi_1\phi_2$ 座標系において、固有ベクトル $\{\phi\}$ に対する“ $[A]$ の1次変換”と“ $\{\beta\}$ の $\lambda$ 倍”が一致するように $\{\phi\}$ と $\lambda$ を定めることである。

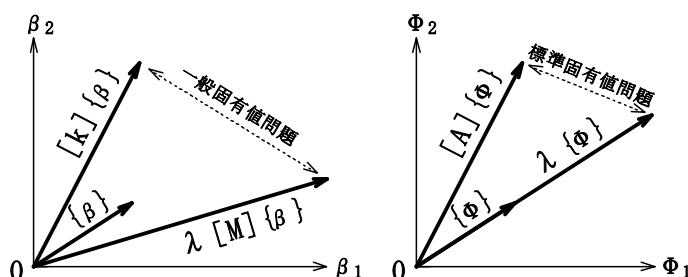


図 19.2 一般形固有値問題と標準形固有値問題

式(19.8)の両辺に任意の定数 $k$ を乗じると

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k\phi_1 \\ k\phi_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} k\phi_1 \\ k\phi_2 \end{Bmatrix} \quad (19.9)$$

となる。したがって、固有ベクトルを $k$ 倍したベクトルも固有ベクトルである。すなわち、固有ベクトルは方向だけが定まっているが、大きさと符号は任意である。言い換えれば、固有ベクトルの成分は比率だけが定まっているのである。

一般形固有値問題は標準形固有値問題に変換することができる。コンピューターでは、通常、標準形固有値問題に変換して計算する。なぜならば、標準形固有値問題に対するすぐれたプログラムが開発されているからである。

## (2) 対称行列の固有値・固有ベクトル

この節では、以降、標準形を論じる。振動学で重要なのは、 $[A]$ (あるいは $[K],[M]$ )が対称行列の場合である。その場合、固有ベクトルの直交性が成り立つ。以降、対称行列の固有値問題だけを論じる。

対称行列の固有値・固有ベクトルを求めよう。式(19.7)の右辺を移項すると

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} - \lambda \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \therefore \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

となる。したがって

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad ([A] - \lambda[I])\{\phi\} = \{0\} \quad (19.10)$$

である。この未知数 $\phi_1, \phi_2$ に関する同次方程式で、自明以外の解が存在するためには、行列式が

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{あるいは} \quad |[A]-\lambda[I]| = 0 \quad (19.11)$$

でなければならない。固有値は、これを解くことによって求めることができる。式(19.11)を行列 $[A]$ の**固有方程式**という。 $[A]$ が $n$ 次の行列である場合、固有値は $n$ 個の解 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ が存在する。それらを式(19.10)に代入することによって、それぞれに対する固有ベクトル $\{\phi\}_1, \{\phi\}_2, \dots, \{\phi\}_n$ が求まる。

固有ベクトルの成分は比率が一定の条件で任意に定めることができる。解析に最も都合がよく、幾何学的に意味のあるのは、固有ベクトルの大きさを1にする場合である。すなわち

$$\sqrt{\phi_{11}^2 + \phi_{21}^2} = 1, \quad \sqrt{\phi_{12}^2 + \phi_{22}^2} = 1, \quad \therefore \phi_{11}^2 + \phi_{21}^2 = 1, \quad \phi_{12}^2 + \phi_{22}^2 = 1$$

あるいは

$$\begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = 1, \quad \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = 1 \quad \text{あるいは} \quad \{\phi\}_i^T \{\phi\}_i = 1 \quad (19.12)$$

である。これを**正規化**するという。以降、固有ベクトルはすべて正規化したものを用いる。

### 例題 19.a 固有値・固有ベクトル

対称行列 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよう。固有方程式(19.11)より

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$$

したがって、1次と2次の固有値は

$$\lambda_1 = 1.382, \quad \lambda_2 = 3.618 \quad (a)$$

である。

固有ベクトルをきめる方程式(19.10)は

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \begin{cases} (3-\lambda)\phi_1 + \phi_2 = 0 \\ \phi_1 + (2-\lambda)\phi_2 = 0 \end{cases} \quad (b)$$

である。式(b)の右の連立1次方程式に着目すると、係数行列の行列式が0であ



るから、2つの式は同じである。第2式を用いると、1次と2次の固有ベクトルの成分

$$\frac{\phi_{11}}{\phi_{21}} = \lambda_1 - 2 = -0.6180, \quad \frac{\phi_{12}}{\phi_{22}} = \lambda_2 - 2 = 1.618$$

が求まる。

正規化した固有ベクトルは、式(19.12)より

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5257 \\ -0.8507 \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \begin{Bmatrix} -0.5257 \\ 0.8507 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

$$\{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8507 \\ 0.5257 \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \begin{Bmatrix} -0.8507 \\ -0.5257 \end{Bmatrix} \quad (d)$$

である。

1次と2次の固有ベクトルの内積を求めてみよう。

$$\{\phi\}_1 \cdot \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \{0.5257 \quad -0.8507\} \begin{Bmatrix} 0.8507 \\ 0.5257 \end{Bmatrix} = 0 \quad (e)$$

すなわち、対称行列の固有ベクトルは直交する。

### (3) 対称行列の対角化

“固有ベクトルの直交性”の一般的証明の方法は、10.1(2)項と同様であるので、ここでは割愛する。

1次と2次の固有ベクトルは、式(19.7)より

$$[A]\{\phi\}_1 = \lambda_1 \{\phi\}_1, \quad [A]\{\phi\}_2 = \lambda_2 \{\phi\}_2 \quad (19.13)$$

が成り立つ。固有ベクトルを列ベクトルとした行列

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad (19.14)$$

を**固有マトリックス**という。転置行列 $[\Phi]^T$ と $[\Phi]$ の積は、固有ベクトルの直交性と正規化から

$$[\Phi]^T [\Phi] = \begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T \\ \{\phi\}_2^T \end{bmatrix} [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2] = \begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T \{\phi\}_1 & \{\phi\}_1^T \{\phi\}_2 \\ \{\phi\}_2^T \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2^T \{\phi\}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] \quad (19.15)$$

単位行列となる。したがって、正規化した固有マトリックスは直交行列である。

行列 $[A]$ に右から固有マトリックス $[\Phi]$ を乗じると

$$[A][\Phi] = [A][\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2] = [[A]\{\phi\}_1 \quad [A]\{\phi\}_2] \quad (19.16)$$

となる。この式に(19.13)を代入すると

$$[A][\Phi] = [\lambda_1 \{\phi\}_1 \quad \lambda_2 \{\phi\}_2] \quad (19.17)$$

となる。行列と固有ベクトルの積が、固有ベクトルの固有値倍になることに着目すべきである。

この式に左から固有マトリックス $[\Phi]^T$ を乗じると

$$[\Phi]^T [A][\Phi] = \begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T \\ \{\phi\}_2^T \end{bmatrix} [\lambda_1 \{\phi\}_1 \quad \lambda_2 \{\phi\}_2] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \{\phi\}_1^T \{\phi\}_1 & \lambda_2 \{\phi\}_1^T \{\phi\}_2 \\ \lambda_1 \{\phi\}_2^T \{\phi\}_1 & \lambda_2 \{\phi\}_2^T \{\phi\}_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [\Phi]^T [A][\Phi] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \equiv [\Lambda] \quad (19.18)$$

対角行列となる。

以上のことから、行列 $[A]$ の“正規化した固有マトリックス”には、重要な性質がある、すなわち①固有マトリックスは直交行列であり、 $[\Phi]^T[\Phi]$ は単位行列となる、② $[\Phi]^T[A][\Phi]$ は固有値を成分とした対角行列となる。

#### (4) 連立微分方程式を連成しない微分方程式への変換

対称行列の対角化の応用例として、“2次曲線の標準化”もあるが、ここでは、振動学と直接関係がある、標準形連立微分方程式(19.8)を連成しない方程式群に変換する方法を考えてみよう。

元の変数 $\{x\}$ と1次変換の関係にある新しい変数 $\{u\}$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \{x\} = [\Phi]\{u\}$$

すなわち

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \left[ \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \{x\} = [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2]\{u\} \quad (19.19)$$

を導入する。ただし、 $[\Phi]$ は正規化した固有マトリックスである。 $[\Phi]$ は直交行列であるから、式(19.19)は直交座標変換でもある。したがって、 $u_1$ 軸と $u_2$ 軸の

基本ベクトルを  $x_1, x_2$  座標系の数ベクトルで表すと、それぞれ  $\{\phi\}_1$  と  $\{\phi\}_2$  である。

式(19.19)を(19.8)に代入すると

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

あるいは

$$[\Phi]\{\ddot{u}\} + [A][\Phi]\{u\} = \{b\} \quad (19.20)$$

となる。さらに、左から固有マトリックスの転置  $[\Phi]^T$  を乗じると

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

となる。この式に(19.15)・(19.18)を代入すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

となる。ゆえに

$$\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \begin{cases} \ddot{u}_1 + \lambda_1 u_1 = \phi_{11} b_1 + \phi_{21} b_2 \\ \ddot{u}_2 + \lambda_2 u_2 = \phi_{12} b_1 + \phi_{22} b_2 \end{cases}$$

あるいは

$$\{\ddot{u}\} + [\Lambda]\{u\} = [\Phi]^T \{b\} \quad (19.21)$$

となる。

これが、連立微分方程式(19.8)を連成しない微分方程式に変換する仕組みである。ここで着目すべきことは、式(19.8)の左辺の第2項の行列[A]の対角化が行われると同時に、第1項においても変数変換(式(19.20))によって生じた行列[\Phi]も対角化(単位行列)されていることである。

### 19.3 標準形固有値問題からみたモード解析

2自由度系の非減衰強制振動を標準形固有値問題に変換して解析し、幾何学的意味を考察してみよう。

その運動方程式(19.5)を再掲すると

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} \quad (19.22)$$

である。この式を標準形連立微分方程式にするためには、質量マトリックス  $[M]$  が単位マトリックスになるように、式(19.22)を変換する必要がある。

$[M]$  は対角行列であるので

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \quad (19.23)$$

である。また、逆行列と行列の積は単位行列であるので

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \therefore & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19.24)$$

である。式(19.22)の第1項に(19.23)を、第2項に(19.24)を代入すると

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} \\ \therefore & \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sqrt{m_1} \ddot{x}_1 \\ \sqrt{m_2} \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11}/\sqrt{m_1} & k_{12}/\sqrt{m_2} \\ k_{21}/\sqrt{m_1} & k_{22}/\sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sqrt{m_1} x_1 \\ \sqrt{m_2} x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで変数を変換する。すなわち

$$\begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11}/\sqrt{m_1} & k_{12}/\sqrt{m_2} \\ k_{21}/\sqrt{m_1} & k_{22}/\sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} \quad (19.25)$$

$$X_1 = \sqrt{m_1} x_1, \quad X_2 = \sqrt{m_2} x_2 \quad (19.26)$$

である。新しい変数  $X_1, X_2$  を元の変位  $x_1, x_2$  に対して**標準形変位**とよぶことにす

る。

式(19.25)の左から

$$\begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_2} \end{bmatrix}$$

を乗じると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}/\sqrt{m_1} & k_{12}/\sqrt{m_2} \\ k_{21}/\sqrt{m_1} & k_{22}/\sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11}/m_1 & k_{12}/\sqrt{m_1 m_2} \\ k_{21}/\sqrt{m_1 m_2} & k_{22}/m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t)/\sqrt{m_1} \\ f_2(t)/\sqrt{m_2} \end{Bmatrix} \quad (19.27)$$

となる。この式を書き換えると

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (19.28)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}/m_1 & k_{12}/\sqrt{m_1 m_2} \\ k_{21}/\sqrt{m_1 m_2} & k_{22}/m_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t)/\sqrt{m_1} \\ f_2(t)/\sqrt{m_2} \end{Bmatrix} \quad (19.29)$$

となる。したがって、一般形連立微分方程式(19.22)を標準形連立微分方程式(19.8)へ変換できたわけである。

標準形固有値問題・式(19.7)を解くことによって、標準形変位と基準座標  $\{u\}$  の変数変換式

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \{X\} = [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2] \{u\} = [\Phi] \{u\} \quad (19.30)$$

が求まる。ここで、 $[\Phi]$ は固有マトリックスである。

モードマトリックスを求めよう。式(19.30)に(19.26)を代入すると

$$\begin{Bmatrix} \sqrt{m_1} x_1 \\ \sqrt{m_2} x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}/\sqrt{m_1} & \phi_{12}/\sqrt{m_1} \\ \phi_{21}/\sqrt{m_2} & \phi_{22}/\sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (19.31)$$

となる。したがって、一般形固有値問題のモードマトリックスは

$$[B] = [\{\beta\}_1 \quad \{\beta\}_2] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}/\sqrt{m_1} & \phi_{12}/\sqrt{m_1} \\ \phi_{21}/\sqrt{m_2} & \phi_{22}/\sqrt{m_2} \end{bmatrix} \quad (19.32)$$

である。

一般形では、正規化とは一般化質量が 1 であることを示そう。式(19.32)の両

辺に  $\begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix}$  を乗じると

$$\begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11}/\sqrt{m_1} & \phi_{12}/\sqrt{m_1} \\ \phi_{21}/\sqrt{m_2} & \phi_{22}/\sqrt{m_2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore [\Phi] = [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1}\beta_{11} & \sqrt{m_1}\beta_{12} \\ \sqrt{m_2}\beta_{21} & \sqrt{m_2}\beta_{22} \end{bmatrix} \quad (19.33)$$

となる。正規化の条件である式(19.12)に(19.33)を代入すると

$$\begin{Bmatrix} \sqrt{m_1}\beta_{11} \\ \sqrt{m_2}\beta_{21} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sqrt{m_1}\beta_{11} \\ \sqrt{m_2}\beta_{21} \end{Bmatrix} = 1, \quad \therefore \left( \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{Bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{Bmatrix} = 1$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{Bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{Bmatrix} = 1$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{Bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{Bmatrix} = 1, \quad \therefore \begin{Bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{Bmatrix} = 1$$

すなわち、一般化質量が

$$\{\beta\}_i^T [M] \{\beta\}_i = 1 \quad (19.34)$$

である。すなわち、固有ベクトルを正規化することは、今までに述べたように、一般形固有値問題で一般化質量を1にすることである。

**例題 19.b 標準形固有値解析とその幾何学的意味**

(1) 標準形固有値解析

図 6.2 に示す条件に対して、標準形固有値問題に変換して解析してみよう。

すなわち

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (a)$$

である。これらを式(19.26)・(19.29)に代入すると

$$X_1 = \sqrt{2m}x_1, \quad X_2 = \sqrt{m}x_2 \quad (b)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k/m & -k/\sqrt{2m} \\ -k/\sqrt{2m} & k/m \end{bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t)/\sqrt{2m} \\ f_2(t)/\sqrt{m} \end{bmatrix} \quad (c)$$

となる。したがって、標準形連立微分方程式は、式(19.28)より

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k/m & -k/\sqrt{2m} \\ -k/\sqrt{2m} & k/m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t)/\sqrt{2m} \\ f_2(t)/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

あるいは

$$\{\ddot{X}\} + [A]\{X\} = \{b\} \quad (d)$$

となる。

行列[A]の固有方程式(19.11)は

$$\begin{vmatrix} k/m - \lambda & -k/\sqrt{2m} \\ -k/\sqrt{2m} & k/m - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \lambda^2 - 2k/m \cdot \lambda + k/2m = 0 \quad (e)$$

である。ゆえに、1次と2次の固有値は

$$\lambda_1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{k}{m}, \quad \lambda_2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{k}{m} \quad (f)$$

である。

式(19.10)は

$$a_{21}\phi_1 + (a_{22} - \lambda)\phi_2 = 0, \quad \therefore \phi_1/\phi_2 = -(a_{22} - \lambda)/a_{21}$$

$$\therefore \phi_1/\phi_2 = (k/m - \lambda)/(k/\sqrt{2}m) \quad (g)$$

である。この式に(f)を代入すると

$$\phi_{11}/\phi_{21} = 1, \quad \phi_{12}/\phi_{22} = -1 \quad (h)$$

となる。正規化すると、1次と2次の固有ベクトルは

$$\begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix} \quad (i)$$

となる。

したがって、固有マトリックスと変数変換式は

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (j)$$

となる。連成し方程式群は、式(19.21)より

$$\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-1/\sqrt{2})k/m & 0 \\ 0 & (1+1/\sqrt{2})k/m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1(t)/\sqrt{2}m \\ f_2(t)/\sqrt{m} \end{Bmatrix} \quad (k)$$

である。

モードマトリックスは、式(19.32)より下式となる。

$$[B] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2}m & -1/\sqrt{2}m \\ 1/\sqrt{2}m & 1/\sqrt{2}m \end{bmatrix} \quad (l)$$

## (2) 幾何学的意味

実際に数値を代入して幾何学的意味を考察してみよう。 $m = 10000\text{kg}$ ,  
 $k = 30000\text{kN/m}$ とし、時刻 $t = 0$ における元の変位と加速度を、それぞれ

$$\bar{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.012 \\ 0.020 \end{Bmatrix} \text{m}, \quad \bar{\ddot{x}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ -5 \end{Bmatrix} \text{m/s}^2 \quad (m)$$

とする。

標準形変位 $X_1, X_2$ と基準座標 $u_1, u_2$ の関係は、式(j)より



$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (n)$$

である。式(19.4)より、 $u_1$ 軸と $u_2$ 軸の基本ベクトルを $X_1X_2$ 座標系の数ベクトルで表すと

$$\vec{e}_{u1} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix}, \quad \vec{e}_{u2} = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix} \quad (o)$$

である。したがって、原点を共有させて、 $X_1X_2$ 座標系と $u_1u_2$ 座標系を同時に描くと図 19.b(a)となる。すなわち、 $u_1u_2$ 座標系は、 $X_1X_2$ 座標系を $\pi/4$ 回転させた座標系である。図 19.b(a)を共通座標系とよぶことにする。

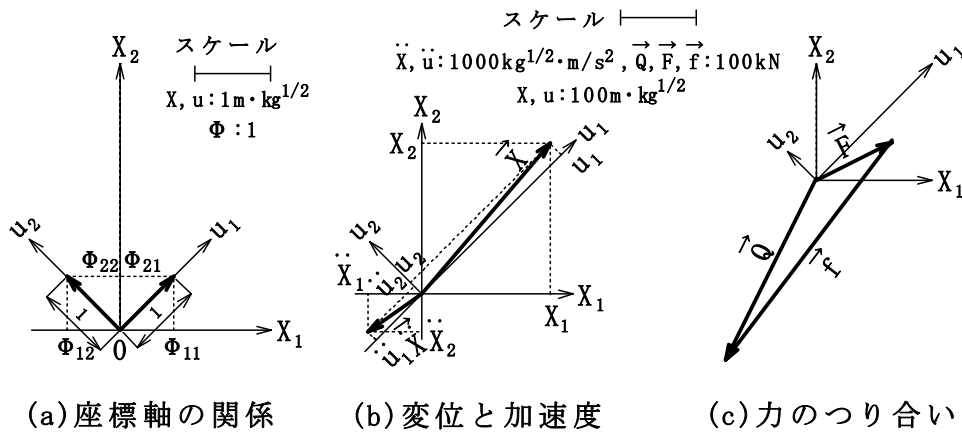


図 19. b 各ベクトルの幾何学的意味

標準形の加速度は、式(b)を 2 回微分した

$$\ddot{X}_1 = \sqrt{2m}\ddot{x}_1, \quad \ddot{X}_2 = \sqrt{m}\ddot{x}_2 \quad (p)$$

である。したがって、標準形の変位と加速度は、式(b)と(p)より、それぞれ

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{20000}x_1 \\ \sqrt{10000}x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.697 \\ 2.000 \end{Bmatrix} \text{kg}^{1/2} \cdot \text{m} \\ \vec{\ddot{X}} &= \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{20000}\ddot{x}_1 \\ \sqrt{10000}\ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -707.1 \\ -500.0 \end{Bmatrix} \text{kg}^{1/2} \cdot \text{m/s}^2 \end{aligned} \quad (q)$$

である。式(n)は、元の変位と標準形の変位の座標変換である。また、式(n)を 2 回微分すると

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (r)$$

となるから、この式は、元の加速度と標準形の加速度の座標変換である。したがって、標準形の変位と加速度は、図 19.b(b)に示すように、共通座標系で表わすことができる。

復元力  $\bar{Q}$  と慣性力  $\bar{F}$  は、式(19.22)・(19.25)より

$$\begin{cases} \bar{Q} = \begin{Bmatrix} Q_{X1} \\ Q_{X2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}/\sqrt{m_1} & k_{12}/\sqrt{m_2} \\ k_{21}/\sqrt{m_1} & k_{22}/\sqrt{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \\ \bar{F} = \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{X2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (s)$$

$$\therefore \begin{cases} \bar{Q} = \begin{Bmatrix} Q_{X1} \\ Q_{X2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 60000 & -30000 \\ -30000 & 30000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.012 \\ 0.020 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 120 \\ 240 \end{Bmatrix} \text{kN} \\ \bar{F} = \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{X2} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 10000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -5 \\ -5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100000 \\ 50000 \end{Bmatrix} \text{N} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 50 \end{Bmatrix} \text{kN} \end{cases} \quad (t)$$

である。 $\bar{Q}$  と  $\bar{F}$  は、それぞれ標準形の変位  $\{X\}$  と加速度  $\{\ddot{X}\}$  の “ $X_1X_2$ 座標系における 1 次変換” であるから、 $X_1X_2$ 座標系に描くことができる。さらに、 $\{X\}$  と  $\{\ddot{X}\}$  はそれぞれ  $\{u\}$  と  $\{\ddot{u}\}$  の座標変換であるから、 $\bar{Q}$  と  $\bar{F}$  は、図 19.b(c)に示すように、共通座標系で表すことができる。なお、復元力の正方向は他の力の逆方向であることに注意する。

力のつり合いは、外力を  $\bar{f}$  とすると、式(19.25)より

$$\bar{Q} = \bar{F} + \bar{f} \quad (u)$$

と表すことができるから、それら 3 つの力で三角形が形成される。

## 第 7 部の参考文献

- [7.1] 矢野健太郎・石原繁, (1994), “線形代数”, 裳華房。
- [7.2] 薩摩順吉・四ツ谷晶二, (2000), “キーポイント線形代数”, 岩波書店。
- [7.3] 戸田盛和・浅野功義, (2000), “行列と 1 次変換”, 岩波書店。

## あとがき

通常、ある理論を理解する過程として、三つの段階を経なければなりません。すなわち、①努力しているにもかかわらず、その理論のどこがわからないことさへわからない段階、②何かをきっかけとして概念を理解し、わかってきたような気持ちになる段階、③本等を参考としながら、思索により深い理解に達する段階です。②の段階、すなわち理論の概念を理解する段階に達すれば、③の段階に至ることは、熱意を必要としますがさほど困難ではないと思います。しかしながら、②の段階に達するのは、難しい理論であればあるほど困難であるのが実状です。

技術者が実務で必要としている振動学の内容は、かなり高度で広範囲であると思います。この本は、そのような振動学の概念を理解するための一助となることを目的としました。そのために、振動学およびそれに必要な数学について、概念のイメージがわくように、多少厳密性や一般性を犠牲にしても、具体的な説明をするように努めました。一人の方でも、この本によって振動学の概念を把握することができたならば、幸いであると思っています。

長きにわたるセミナーにつきあっていただきまして有難うございました。

2004年4月21日

著者 竹名 興英  
温留漢  
亀岡 裕行